第6卷 第2期 华侨大学学报 Vol.6 No.2
1985年5月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY May 1985

# 拟共形映照的模数偏差

赖万才

（应用数学系）

摘 要

本文改进拟共形映照理论中的 Schwarz 引理的已有结果，以便适应函数论中发展起来了的应用。

设 $G$ 是 $z$ 平面上的一个区域．$w(z)$ 是 $G$ 上的一个保向同胚映照．用 $Q$ 表示一个拓扑四角形．$\operatorname{mod}Q$ 表示 $Q$ 的共形模数(共形等价矩形的边长之比)．置

$$K(G)=\sup_{Q\subset G}\frac{\operatorname{mod}w(Q)}{\operatorname{mod}Q},$$

当 $K(G)<\infty$ 时，称 $w(z)$ 为 $G$ 上的一个拟共形映照．当 $K(G)\leqslant K<\infty$ 时，称 $w(z)$ 为 $G$ 上的一个 $K$ 拟共形映照．

设 $w=f(z)$ 是单位园 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的一个 $K$ 拟共形映照，适合条件 $f(0)=0$，对于这样的函数，Белинский[1] 证明

$$\mu^{-1}(K\mu(|z|))\leqslant|f(z)|\leqslant\mu^{-1}\left(\frac{1}{K}\mu(|z|)\right),\tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mu(r)&=\frac{\pi}{2}\,\frac{K(1-r^2)}{K(r^2)},\\ K(r)&=\int_0^1\frac{dt}{[(1-t^2)(1-rt^2)]^{1/2}}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Mori[2] 用共形模数方法估计 $\mu^{-1}((1/K)\mu(|z|))$ 的上界和 $\mu^{-1}(K\mu(|z|))$ 的下界，引出估计式

$$4^{-K}|z|^K\leqslant|f(z)|\leqslant4|z|^{1/K},$$

王传芳[3] 用拟共形映照的参数表示法得到

$$4^{1-K}|z|^K\leqslant|f(z)|\leqslant4^{1-1/K}|z|^{1/K}.$$

在本文中，我们来直接估计 $\mu^{-1}((1/K)\mu(|z|))$ 的上界和 $\mu^{-1}(K\mu(|z|))$ 的下界，得到较强的

**定理** 设 $w=f(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的 $K$ 拟共形映照，适合条件 $f(0)=0$，那么

$$\begin{aligned}|f(z)|\leqslant\mu^{-1}((1/K)\mu(|z|))&\leqslant\frac{4[|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{1/K}}{1+4[|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{2/K}}\\&\leqslant[2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{1-1/K}|z|^{1/K},\end{aligned}\tag{3}$$

本文1984年11月22日收到。

$$|f(z)|\geqslant\mu^{-1}(K\mu(|z|))\geqslant\frac{4[|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^K}{1+4[|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{2K}}$$
$$\geqslant[2(1+(1-|z|^2)^{1/2}]^{1-K}|z|^K, \tag{4}$$

其中 $\mu(r)$ 同 (2)。

**注** 我们在 (3) 和 (4) 中特别写出比较复杂的那个估计式是因为在别处有用。

**证** 置

$$\lambda=\mu^{-1}(\alpha\mu(r)),$$
$$\sigma(r)=\log[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]+\mu(r),$$
$$\tau(r)=(1-r^2)^{1/2}K^2(r^2).$$

利用恒等式[1]

$$K(z)K'(1-z)+K'(z)K(1-z)=(\pi/4)(1/z(1-z)),$$

有

$$\sigma'(r)=\frac{1}{r(1-r^2)^{1/2}}+\mu'(r)$$
$$=\frac{1}{r(1-r^2)^{1/2}}-\frac{\pi r}{K^2(r^2)}[K(r^2)K'(1-r^2)+K'(r^2)K(1-r^2)]$$
$$=\frac{1}{r(1-r^2)^{1/2}}\left\{1-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(1-r^2)^{1/2}K^2(r^2)}\right\}.$$

注意到

$$K'(r)=-\frac{1}{2r}\left\{K(r)-\frac{1}{1-r}E(r)\right\},$$

这里

$$E(r)=\int_0^1\frac{(1-rt^2)^{1/2}}{(1-t^2)^{1/2}}dt$$

有

$$\tau'(r)=-\frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}K^2(r^2)+4r(1-r^2)^{1/2}K(r^2)K'(r^2)$$
$$=-\frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}K(r^2)[K(r^2)-4(1-r^2)K'(r^2)]$$
$$=-\frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}K(r^2)[K(r^2)+\frac{2(1-r^2)}{r^2}(K(r^2)-\frac{E(r^2)}{1-r^2})]$$
$$=-\frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}K(r^2)\left\{\frac{2}{r^2}\left[K(r^2)-E(r^2)\right]-K(r^2)\right\}\leqslant 0,$$

上式最后一步由 $K(r)$ 和 $E(r)$ 的级数展式知道。因此 $\tau(r)$ 是 $r$ 的减少函数，又 $\lim\limits_{r\to 0}\tau(r)=\frac{\pi^2}{4}$，故 $\tau(r)\leqslant\frac{\pi^2}{4}$。这样一来，我们得到 $\sigma'(r)\leqslant 0$。于是 $\sigma(r)$ 是 $r$ 的减少函数。但 $\lim\limits_{r\to 0}\sigma(r)=0$，从而当 $\lambda\geqslant r$ 时，$\sigma(\lambda)\leqslant\sigma(r)\leqslant 0$；当 $\lambda\leqslant r$ 时，$0\geqslant\sigma(\lambda)\geqslant\sigma(r)$。因为 $\mu(r)$ 是 $r$ 的减少函数，故从 $\mu(\lambda)=\alpha\mu(r)$ 知道当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，有 $\lambda\geqslant r$；当 $1\leqslant\alpha<\infty$ 时，有 $\lambda\leqslant r$。总起来：

I）当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，

$$\mu^{-1}(\alpha\mu(r))=\lambda=2(1+\sqrt{1-\lambda^2})\left[\frac{r}{2(1+\sqrt{1-r^2})}\right]^\alpha\exp(\sigma(\lambda)-\alpha\sigma(r))$$

$$\leqslant 2(1+\sqrt{1-\lambda^2})\left[\frac{r}{2(1+(1-r^2)^{1/2})}\right]^{\alpha}. \tag{5}$$

所以

$$\mu^{-1}(\alpha\mu(r))\leqslant\frac{4[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{\alpha}}{1+4[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{2\alpha}}$$
$$\leqslant[2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{1-\alpha}r^{\alpha}, \tag{6}$$

其中第一个不等式得自解(5)，第二个不等式得自(5)的右端用 $r$ 去代替 $\lambda$，它们之成立是由于 $\lambda/2[1+(1-\lambda^2)^{1/2}]$ 为 $\lambda$ 的增加函数并 $\lambda\geqslant r$.

Ⅱ)当 $1\leqslant\alpha<\infty$ 时，

$$\mu^{-1}(\alpha\mu(r))=\lambda=2(1+(1-r^2)^{1/2})[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{\alpha}\exp(\sigma(\lambda)-\alpha\sigma(r))$$
$$\geqslant 2(1+(1-\lambda^2)^{1/2})[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{\alpha} \tag{7}$$

所以

$$\mu^{-1}(\alpha\mu(r))\geqslant\frac{4[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{\alpha}}{1+4[r/2(1+(1-r^2)^{1/2})]^{2\alpha}}$$
$$\geqslant[2(1+(1-r^2)^{1/2}]^{1-\alpha}r^{\alpha}, \tag{8}$$

其中第一个不等式得自解(7)，第二个不等式得自(7)的右端用 $r$ 去代替 $\lambda$，它们之成立是由于 $\lambda/2[1+(1-\lambda^2)^{1/2}]$ 为 $\lambda$ 的增加函数并 $\lambda\leqslant r$.

我们在(6)中置 $\alpha=1/K$，$r=|z|$，即得估计式(3)；在(8)中置 $\alpha=K$，$r=|z|$，即得估计式(4)。定理证毕。

## 参　考　文　献


〔1〕П. П. Белинский, Об искажении при квазиконформных отображениях, ДАН СССР, 91(1953), 737-740.

〔2〕A. Mori, On quasi-conformality and pseudo-analyticity, Trans. Amer. Math. Soc., 84(1957), 57—77.

〔3〕王传芳，Q—映照中森(A. Mori)的定理的准确化，科学记录，4(1960)，334—337.

〔4〕赖万才，蓝道定理中的海曼常数的准确值，中国科学，1979，5，495—500.

# On the Distortion of Modulus of Quasiconformal Mappings

Lai Wancai


## Abstract

In this note the following theorem is proved:

Theorem. If $f(z)$ is a K-quasiconformal mapping in the unit disk $|z|<1$ with $f(0)=0$ and $|f(z)|<1$, then

$$|f(z)|\leqslant\mu^{-1}((1/K)\mu(|z|))\leqslant\frac{4[\,|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{1/K}}{1+4[\,|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{2/K}}$$
$$\leqslant[2(1+(1-|z|)^{1/2})]^{1-1/K}|z|^{1/K},$$

$$|f(z)|\geqslant\mu^{-1}(K\mu(|z|))\geqslant\frac{4[\,|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{K}}{1+4[\,|z|/2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{2K}}$$
$$\geqslant[2(1+(1-|z|^2)^{1/2})]^{1-K}|z|^{K},$$

where

$$\mu(r)=\frac{\pi}{2}\frac{K(1-r^2)}{K(r^2)},$$

$$K(r)=\int_0^1\frac{dt}{[(1-t^2)(1-rt^2)]^{1/2}}.$$