

由电压源和线性电阻组成的 网络中戴维南发电机功率

王少雄
(电子工程系)

摘 要

本文证明, 在由电压源和线性电阻组成的网络中, 应用戴维南定理研究电阻负载接入时:

(1) 戴维南发电机功率, 等于负载接入时网络内所有电压源供出功率的增量。

(2) 戴维南发电机内阻所消耗的功率, 等于负载接入时网络内部损耗功率增加值。故此内阻可用来做为衡量网络内部功率损耗改变值的参数。

一、引 言

戴维南定理是网络分析中应用非常广泛的一条定理。它用戴维南发电机代替含源一端口网络。对外电路而言, 这种取代是等效的。而对于戴维南发电机供出的功率, 以及其内阻消耗的功率, 没有人探讨它有什么物理意义。本文旨在讨论当网络是由电压源和线性电阻组成时, 戴维南发电机供出的功率以及其内阻消耗功率的物理意义。并指出对于这种网络, 当外接负载改变时, 戴维南发电机内阻可以用来做为衡量网络内部功耗改变值的参数。

二、戴维南发电机功率及其内阻功耗

图1为一个含有 n 条支路的电压源供电的线性电阻网络。对于电阻为 R_k 的第 K 条支路而言, 网络的其余部份为含有 $n-1$ 条支路的线性有源一端口网络。

设这 $n-1$ 条支路的标号为: $1, 2, \dots, K-1, K+1, \dots, n$ 。支路内含有电源电动势为: $E_1, E_2, \dots, E_{K-1}, E_{K+1}, \dots, E_n$ 。这 $n-1$ 条支路与 k 条路的互电导为: $g_{k1}, g_{k2}, \dots, g_{k, k-1}, g_{k, k+1}, \dots, g_{kn}$ 。

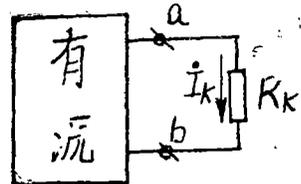


图 1

本文 1984 年 8 月 27 日收到。

有源一端口网络内 $n-1$ 个电源的共同作用, 使负载 R_k 流过 I_k 的电流。设 R_k 支路断开时, ab 两端开路电压为 \dot{U}_{abo} , 在图 1 的支路 k 中, 串入两个数值等于 \dot{U}_{abo} 但方向相反的电动势 \dot{E}'_{ko} 、 \dot{E}''_{ko} , 电路各支路电流不会发生变化, 可得图 2 电路。

利用迭加原理, 把图 2 的电路变为图 3 的两个电路。

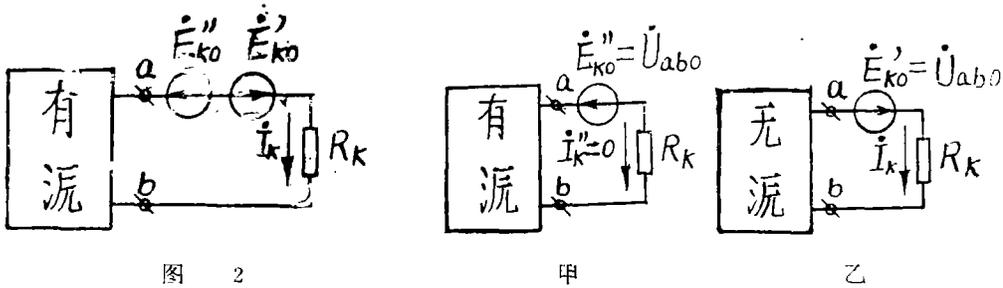


图 3

现在来讨论功率问题:

比较图 1 和图 2。图 2 中 \dot{E}'_{ko} 和 \dot{E}''_{ko} 数值相等, 方向相反, 流过同一电流 I_k , 故它们供出的功率互相抵消。因此图 1 和图 2 两个网络内各电源供出功率和是相等的。

接着比较图 2 和图 3 网络内电源供出的功率。我们下面将得到结论: 图 3 甲乙两电路各电源供出功率之和等于图 2 各电源供出功率之和。

图 2 电路中 \dot{E}'_{ko} 与图 3 乙电路中 \dot{E}'_{ko} 流过的电流均是 I_k , 故此两电源供出的功率是相等的。

图 2 电路中 \dot{E}''_{ko} 流过 I_k 的电流, 而图 3 甲图中的电源 \dot{E}''_{ko} 没有电流, 因此就 k 支路而言, 图 2 电源多发功率 $\Delta P_k = Re(-\dot{E}''_{ko} I_k)$ 。括号内的负号是由于 \dot{E}''_{ko} 与 I_k 参考方向相反造成的。

因为
$$I_k = \dot{E}_1 g_{k1} + \dot{E}_2 g_{k2} + \dots + \dot{E}_{k-1} g_{kk-1} + \dot{E}_{k+1} g_{kk+1} + \dots + \dot{E}_n g_{kn}$$
 所以

$$\Delta P_k = Re[-\dot{E}''_{ko} (\dot{E}_1 g_{k1} + \dot{E}_2 g_{k2} + \dots + \dot{E}_{k-1} g_{kk-1} + \dot{E}_{k+1} g_{kk+1} + \dots + \dot{E}_n g_{kn})] \quad (1)$$

现在比较图 2 与图 3 电路中一端口网络内部 $n-1$ 条支路的电源发出的功率。

因为图 2 较图 3 甲多一个电源 \dot{E}'_{ko} , 故图 2 一端口网络内部每条支路上的电流较图 3 甲的对应支路的电流多了一个分量, 因此图 2 一端口网络内每条支路上的电源多发出功率分别为:

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= Re(\dot{E}_1 \dot{E}'_{ko} g_{1k}) \\ \Delta P_2 &= Re(\dot{E}_2 \dot{E}'_{ko} g_{2k}) \\ \Delta P_{k-1} &= Re(\dot{E}_{k-1} \dot{E}'_{ko} g_{k-1,k}) \\ \Delta P_{n+1} &= Re(\dot{E}_{n+1} \dot{E}'_{ko} g_{n+1,k}) \\ &\dots\dots \\ \Delta P_n &= Re(\dot{E}_n \dot{E}'_{ko} g_{nk}) \end{aligned} \quad (2)$$

把式(1)和式(2)相加, 即可得图 2 各电源较图 3 各电源多供功率之和为:

$$\begin{aligned} \Delta P = & \sum_{i=1}^n \Delta P_i = Re(\dot{E}'_1 \dot{E}'_{ko} g_{1k} - \dot{E}''_{ko} \dot{E}'_1 g_{k1}) \\ & + Re(\dot{E}'_2 \dot{E}'_{ko} g_{2k} - \dot{E}''_{ko} \dot{E}'_2 g_{k2}) + \dots \\ & + Re(\dot{E}'_{k-1} \dot{E}'_{ko} g_{k-1k} - \dot{E}''_{ko} \dot{E}'_{k-1} g_{kk-1}) \\ & + Re(\dot{E}'_{k+1} \dot{E}'_{ko} g_{k+1k} - \dot{E}''_{ko} \dot{E}'_{k+1} g_{kk+1}) \\ & + \dots + Re(\dot{E}'_n \dot{E}'_{ko} g_{nk} - \dot{E}''_{ko} \dot{E}'_n g_{kn}) \end{aligned}$$

因为
所以

$$\begin{aligned} \dot{E}'_{ko} &= \dot{E}''_{ko} & g_{ik} &= g_{ki} \\ Re(\dot{E}'_i \dot{E}'_{ko} g_{ik} - \dot{E}''_{ko} \dot{E}'_i g_{ki}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i = 0 \tag{3}$$

这就是说，图 3 甲乙两电路各电源供出功率之和，等于图 2 各电源供出功率之和，也等于图 1 各电源供出功率之和。三个电路(图 1 至图 3)电源供出功率之和是相等的。

为了便于比较分析，把图 1、图 3 的电路图重新画在图 4 上。图 3 甲 K 支路电流 $I_k^* = 0$

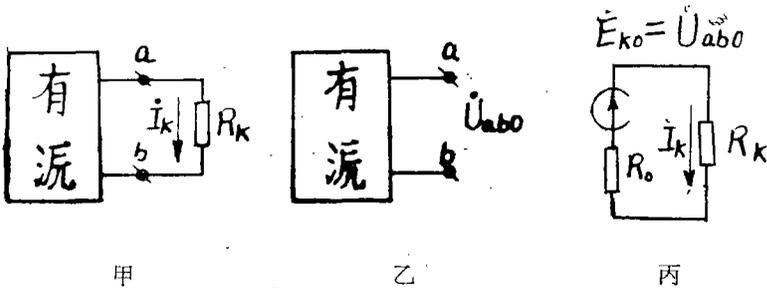


图 4

故 K 支路不再画出。图 3 乙无源一端口网络用其入端电阻 R_o 代替。这样一来：

图 4 甲是包括 R_k 的原网络。设各电源发出功率之和为 P_H 。

图 4 乙是图 3 甲所示电路，即不接负载 R_k 的原网络。设该网络各电源发出功率之和为 P_o 。

图 4 丙是图 3 乙所示的电路。其中 \dot{E}'_{ko} 和 R_o 为戴维南发电机的电势和内阻。设该发电机发出功率为 P_T 。

根据上面论证，图 1 和图 3 电源发出功率相同，也即图 4 甲电源发出功率等于图 4 乙、丙电路电源发出功率之和。即

$$P_H = P_o + P_T \tag{4}$$

$$P_T = P_H - P_o \tag{5}$$

式(5)即是本文第一个结论：戴维南发电机功率，等于负载接入时网络内所有电压源输出功率的增量。

令 断开 R_k 时一端口网络内部电阻功耗为 P_{oR} ，接入 R_k 时一端口网络内部电阻功耗为 P_{HR} ，则

$$\begin{aligned} P_o &= P_{oR} \\ P_H &= P_{HR} + I_k^2 R_k \end{aligned}$$

$$P_R = I_k^2 R_o + I_k^2 R_k$$

因为式 (5) $P_T = P_H - P_o$, 把上列各式代入可得: $I_k^2 R_o = P_{HR} - P_o$ (6)

式(6)就是本文第二个结论: 戴维南发电机内阻所消耗的功率, 等于负载接入时网络内部损耗功率增加值。

三、例 题 验 算

图 5 所示电路,

$$\dot{E}_1 = 80e^{j0^\circ} \text{ 伏}$$

$$\dot{E}_2 = 50e^{j36.9^\circ} \text{ 伏,}$$

$$R_1 = 10 \text{ 欧}$$

$$R_2 = 10 \text{ 欧}$$

$$R_k = 5 \text{ 欧}$$

(1) R_k 接入时, 网络各电源供出功率 P_H , 网络内电阻 $R_1 R_2$ 的功耗 P_{HR} 的计算:

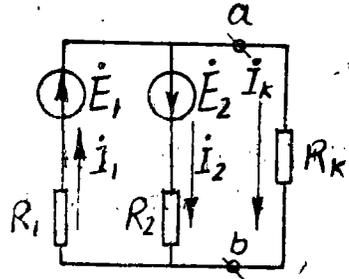


图 5

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{R_1} - \frac{\dot{E}_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_k}} = \frac{50e^{-j36.9^\circ}}{0.1 + 0.1 + 0.2} = 12.5e^{j36.9^\circ} \text{ 伏}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{R_1} = \frac{80e^{j0^\circ} - 12.5e^{-j36.9^\circ}}{10} = 7.04e^{-j6.1^\circ} \text{ 安}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 + \dot{U}_{ab}}{R_2} = \frac{50e^{j36.9^\circ} + 12.5e^{-j36.9^\circ}}{10} = 5.483e^{-j24.2^\circ} \text{ 安}$$

$$P_{H1} = R_o(\dot{E}_1 \dot{I}_1) = R_o(80 \times 7.04e^{-j6.1^\circ}) = 563.2 \times \cos 6.1^\circ = 560 \text{ 瓦}$$

$$P_{H2} = R_o(\dot{E}_2 \dot{I}_2) = R_o(50e^{j36.9^\circ} \times 5.483e^{-j24.2^\circ}) = 274.15 \times \cos 12.7^\circ = 267.43 \text{ 瓦}$$

网络各电源供出功率:

$$P_H = P_{H1} + P_{H2} = 827.43 \text{ 瓦}$$

网络内电阻的功耗:

$$\begin{aligned} P_{HR} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 \\ &= 7.04^2 \times 10 + 5.483^2 \times 10 \\ &= 796.248 \text{ 瓦} \end{aligned}$$

(2) 断开 R_k 时, 原网络各电源发出功率 P_o , 网络内电阻 $R_1 R_2$ 的功耗 P_{oR} 的计算:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{80 + 50e^{j36.9^\circ}}{20} = 6.185e^{j14^\circ} \text{ 安}$$

$$P_{o1} = R_o(\dot{E}_1 \dot{I}) = R_o(80 \times 6.185e^{-j14^\circ}) = 480.08 \text{ 瓦}$$

$$P_{o2} = R_o(\dot{E}_2 \dot{I}) = R_o(50e^{j36.9^\circ} \times 6.185e^{-j14^\circ}) = 284.867 \text{ 瓦}$$

网络内各电源供出功率:

$$P_o = P_{o1} + P_{o2} = 764.947 \text{ 瓦}$$

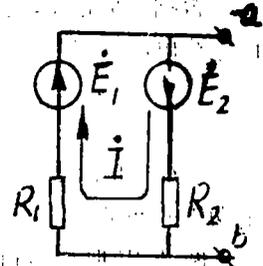


图 6

网络内电阻的功耗:

$$P_{OR} = I^2(R_1 + R_2) = 765 \text{瓦}$$

(3)戴维南发电机(电势 \dot{E}'_{ko})的功率 P_T 和内阻 R_o 的功耗 $I_k^2 R_o$ 的计算:

用戴维南发电机代替有源一端口网络:

$$\dot{E}'_{ko} = \dot{U}_{abo} = \frac{\dot{E}_1}{R_1} - \frac{\dot{E}_2}{R_2} = \frac{8-4-j3}{0.2} = 25e^{-j36.9^\circ} \text{伏}$$

$$R_o = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ 欧}$$

$$I_k = \frac{\dot{E}'_{ko}}{R_o + R_k} = \frac{25e^{-j36.9^\circ}}{10} = 2.5e^{-j36.9^\circ} \text{ 安}$$

$$P_T = R_o(\dot{E}'_{ko} \dot{I}_k) = R_o(25e^{-j36.9^\circ} \times 2.5e^{j36.9^\circ}) = 62.5 \text{ 瓦}$$

$$I_k^2 R_o = 2.5^2 \times 5 = 31.25 \text{ 瓦}$$

(4) 验证:

$$P_H - P_o = 827.43 - 764.947 = 62.483 \text{ 瓦}$$

$$P_T = 62.5 \text{ 瓦}$$

即式(5) $P_T = P_H - P_o$ 证实.

$$P_{HR} - P_{OR} = 796.248 - 765 = 31.248 \text{ 瓦}$$

$$I_k^2 R_o = 31.25 \text{ 瓦}$$

即式(6) $I_k^2 R_o = P_{HR} - P_{OR}$ 证实.

微小误差是由于计算误差造成的.

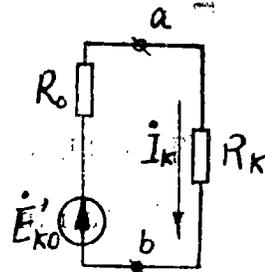


图 7

四、推论与结束语

做为一个推论, 研究 R_k 任意改变时情况.

设 $R_k = R_{k1}$ 时 $I_k = I_{k1}$; $R_k = R_{k2}$ 时 $I_k = I_{k2}$.

根据式(6)可得:

$$I_{k1}^2 R_o = P_{HR1} - P_{OR}$$

$$I_{k2}^2 R_o = P_{HR2} - P_{OR}$$

所以 $I_{k2}^2 R_o - I_{k1}^2 R_o = P_{HR2} - P_{HR1}$, 即 R_k 做任意改变时, R_o 上功耗改变值等于网络内部各电阻功耗改变值.

本文的结论可用来方便地分析直流输电系统负载变化时, 网络内部损耗的变化情况. 只要系统是由电压源和线性电阻组成的网络, 不管其内部结构如何复杂, 当负载 R_k 接入或改变时, 负载接入点网络的入端电阻 R_o , 可用来做为衡量网络内部功耗改变值的参数.

参 考 文 献

- [1] [美] C.A.狄苏尔、葛守仁著、林争辉主译, 电路基本理论, 人民教育出版社, (1979).
[2] J.R.OMALLEY, Circuit Analysis, Prentice-Hall, Inc, (1980).

The Thevenin's Generator Power in A Network Containing Voltage Source And Linear Resistance

Wang Shaoxiong

Abstract

This paper gives proof that when the applied Thevenin's Theorem investigation resistive load is connected to a network containing voltage source and linear resistance,

(1) The power of Thevenin's Generator equals the increment of all the Voltage source supply power in the network when load is connected.

(2) The power expended by the internal resistance of the Thevenin's Generator equals the increment of power expended inside the network when the load is connected. Therefore this internal resistance may be regarded as the quantity that measures the difference of the expended power inside the network.