第6卷 第1期 华侨大学学报 Vol.6 No.1
1985年2月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY Feb.1985

用场论方法证明基尔霍夫定律独立方程的数目

陈燊年
（物理系）

摘要

本文应用特勒根定理和电荷守恒定律，在电阻网络里联立求解并证明了若干线图关系后，可得到基尔霍夫定律两个方程组，从而证明了独立方程的总数目等于网络的支路数。

一、引言

基尔霍夫定律发表于1847年的一篇最早的关于网络拓扑学的文章。该文[1]主要内容是以网络的几何描述为基础，用了许多拓扑学的想法，证明了在给出二组线性方程的形式后，网络支路电流有唯一确定解所需要的独立方程式的数目。这篇划时代文章发表一个多世纪以来，经过波音卡、福斯特[2]、英格拉姆和克莱姆赖[3]、兰梯瑞[4]、珀西瓦尔[5]、贝阿德[6]等人继续在拓扑学和线图方面的卓越研究，使得现在对基尔霍夫定律可以通过拓扑学完全表述。即可以完全建立在近代拓扑学分支概念的基础上，使用本世纪现代数学发展的说法来重新叙述并证明该定律有解的独立方程数目。

基尔霍夫定律的拓扑学表述，对在电路理论中发展基尔霍夫定律作出了重大贡献。首先解决了电路理论中的基本问题，给出了求电流和电压的方法，而且不局限于电阻网络，而是同样适用于不含互感的 RLC 网络。此外，它还可以用于任何有明确定义的加权函数。例如，开关函数和用概率统计定义的网络。但是，拓扑学表述也不是没有缺陷的。首先它只能证明独立方程数目而不能推导出每一个独立方程的表达式，因而不能说明基尔霍夫定律的物理来源问题。其次，拓扑学毕竟还不是一门很普及的数学知识，因而在一般教学中难以完成这方面的内容。正是这个原因，尽管人们在工作中经常使用到基尔霍夫定律，但是对它们的全部内容，尤其是独立方程数目的证明仍为很少人所知，在一般电磁场专著中也未见到有关的证明。

本文将给出证明独立方程数目在教学上可行的一种途径，这个途径与基尔霍夫定律关联的场论思想密切结合，由于研究是任意的电阻网络，虽然也离不开讨论线图的某些问题，但只用到众所周知的行列式的定理，而且证明的结果对基尔霍夫定律是完整统一的。即不仅证

本文1984年9月21日收到。

明了独立方程数目，同时也得到每一个独立方程所约束的线性函数的形式以及正负号法则，从而对基尔霍夫定律作了电磁理论系统性的表述。

二、特 勒 根 定 理

电磁场的电荷守恒定律和能量守恒与转化定律是

$$\oint \vec{j}\cdot d\vec{\sigma} = -\frac{d}{dt}\int \rho' dv \qquad (1)$$

$$\int \vec{E}\cdot\vec{j}dv + \frac{d}{dt}\int w dv = -\oint \vec{s}\cdot d\vec{\sigma} \qquad (2)$$

式中 w 和 $\vec{s}$ 分别是电磁场能量密度和能流密度矢量。利用稳恒场不随时间变化的条件并代入如下的普遍的欧姆定律的微分形式

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}(\vec{E}+\vec{K})$$

得出稳恒电流中相应的二个守恒定律为

$$\oint \vec{j}\cdot d\vec{\sigma} = 0 \qquad (3—1)$$

$$\int \vec{K}\cdot\vec{j}dv = \int \rho j^2 dv + \oint \vec{s}\cdot d\vec{\sigma} \qquad (3—2)$$

若是考虑整个空间，因无穷远处没有辐射场，式（3—2）右边第二项面积分为零。如再作代换 $\vec{j}dv=\sigma' jd\vec{l}$（$\sigma'$ 为导线或电源的均匀横截面）后，上式便化成对作线电流分布的任意电路系统都适用的线积分的形式

$$\int j\vec{K}\cdot d\vec{l} = \int \rho j\vec{j}\cdot d\vec{l} \qquad (4)$$

考虑一电路系统，设有 p 个支路。令 ρ_i 代表第 i 支路的电阻率，$\vec{K}_i$ 代表与 i 支路串联的电源非静电力，则上式展开成

$$\sum_{i=1}^{p}\int j_i\vec{K}_i\cdot d\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{p}\int \rho_i j_i\vec{j}_i\cdot d\vec{l}_i$$

稳恒电流保证在任一支路上 j_i 的值都是恒量，故由上式移项得

$$\sum_{i=1}^{p} j_i\left(\int \vec{K}_i\cdot d\vec{l}_i - \int \rho_i\vec{j}_i\cdot d\vec{l}_i = 0\right) \qquad (5)$$

根据端电压定义，上式化成

$$\sum_{i=1}^{p} j_i V_i = 0$$

此即特勒根定理[7]。由此可见，式（4）是特勒根定理的积分形式。

三、电 阻 网 络

设有一个电阻网络、内含 p 个支路和 q 个节点，这 p 个支路彼此作任意方式的连接而且每个支路都通过一定的电流。如令 j_i 代表第 i 支路上的电流密度矢量的值，则按式(3—1)电

荷守恒定律对所有 q 个节点写下的方程组为

$$\sum_{i=1}^{p} a_{\mu i} j_i = 0 \quad (\mu = 1、2、\cdots q) \tag{6}$$

式中系数 $a_{\mu i}$ 只能取 ± 1 或 0。上式用希腊字母代表节点，用拉丁字母代表支路。

我们暂时假设方程组（6）的系数组成的矩阵的秩等于 $q-1$，（见命题一的证明）则在电流组中一共就有 $q-1$ 个的 j_1、j_2、…、j_{q-1} 独立变量，而把其余 $p-(q-1)$ 个的 j_q、j_{q+1}、…、j_p 非独立变量都移到每个方程的右边。因为总可以设法排列使方程组(6) 前面的 $q-1$ 个方程为线性无关，则

$$\sum_{i=1}^{q-1} a_{\mu i} j_i = \sum_{k'=q}^{p} (-a_{\mu k'}) j_{k'} \quad (\mu = 1、2、\cdots、q-1) \tag{7}$$

式中用不带敞和带敞的拉丁字母以示区别独立变量和非独立变量的序数。引用克莱姆规则和行列式定理，求得它们的解为[8]

$$j_i = \sum_{k'=q}^{p} A_{k' i} j_{k'} \quad (i = 1、2、\cdots、q-1) \tag{8}$$

$$A_{k' i} = \frac{D_{k' i}}{D} \tag{9}$$

式中 D 为方程组（7）左边的系数组成的 $q-1$ 阶行列式；$D_{k' i}$ 为把方程组（7）右边含 $j_{k'}$ 的系数项 $-a_{\mu k'}$ 作为一列代替 D 中第 i 列得到的 $q-1$ 阶行列式，即

$$D_{k' i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & -a_{1k'} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,q-1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & -a_{2k'} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,i-1} & -a_{q-1,k'} & a_{q-1,i+1} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix}$$

按式（4）特勒根定理对所有 p 个支路写下的方程已由式（5）所示，现把对 p 个支路的求和分为先对独立支路 i 求和再对非独立支路 k' 求和，即

$$\sum_{i=1}^{q-1} j_i \left(\int \vec{K}_i \cdot d\vec{l}_i - \int \rho_i \vec{j}_i \cdot d\vec{l}_i\right) + \sum_{k'=q}^{p} j_{k'} \left(\int \vec{K}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'} - \int \rho_{k'} \vec{j}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'}\right) = 0$$

上式第一项园括弧外的 j_i 用式（8）代入得

$$\sum_{i=1}^{q-1} \left(\sum_{k'=q}^{p} A_{k' i} j_{k'}\right) \left(\int \vec{K}_i \cdot d\vec{l}_i - \int \rho_i \vec{j}_i \cdot d\vec{l}_i\right) + \sum_{k'=q}^{p} j_{k'} \left(\int \vec{K}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'} - \int \rho_{k'} \vec{j}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'}\right) = 0$$

第一项互易二重求和的次序并同第二项合并同类项得

$$\sum_{k'=q}^{p} j_{k'} \left[\left(\sum_{i=1}^{q-1} A_{k' i} \int \vec{K}_i \cdot d\vec{l}_i + \int \vec{K}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'}\right) - \left(\sum_{i=1}^{q-1} A_{k' i} \int \rho_i \vec{j}_i \cdot d\vec{l}_i + \int \rho_{k'} \vec{j}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'}\right)\right] = 0 \tag{10}$$

为了继续演算上式，先证明网络线图的若干命题。

四、命 题 证 明

按定义 D 代表方程组（7）式左边的系数组成的 $q-1$ 阶行列式。如其中第 μ 行代表第 μ 个节点，而第 i 列代表第 i 条独立支路，则一个 D 对應一个由 $q-1$ 个独立支路与 $q-1$ 个节点

之间所连通的网络线图。在此线图中，由于电流通过一个支路可以有二个方向，因此不妨规定当支路 i 与节点 μ 连通时，分别视电流方向为趋于节点 i 或背离节点 i，而取 D 中的第 μ 行第 i 列元素 $a_{\mu i}$ 为 $+1$ 或 -1；反之，当支路 i 不与节点 μ 连通时取 $a_{\mu i}$ 为零。显然，一个支路最多只能与二个节点连通，因而 D 的每一列最多只包含二个非零元素。应当注意的是，i 支路的一端如果是与没有出现在 D 中的属网络中第 q 个最后节点连通时，则 D 中的第 i 列只出现一个非零元素。如上所述，行列式的列是与线图中的支路对应，按 $D_{k'i}$ 的定义，以下我们称它为用非独立支路 k' 代替 D 中独立支路 i 后所得到的行列式。

下面给出由方程组（6）的系数组成的矩阵的秩等于 q-1 的假设所需的几何条件。

命题一 若D的线图满足：

（1）q-1个独立支路不形成任一闭合回路；

（2）每一个节点至少被一个独立支路连通；

（3）不能分解成几个完全分离的独立部分。

则 D 不为零，亦即由方程组（6)的系数组成的矩阵的秩等于 q-1。

证明

设 D 中 q-1 个独立支路形成了一个闭合回路，则每个独立支路必连通二个节点。若这些节点都不属第 q 个最后节点，则 D 的每一列都含有一个 $+1$和一个 -1 的元素，使 D 的 $q-1$ 行相加之和为零；若这些节点有一个属第 q 个最后节点，使 D 中被第 q 个节点取代的那一行元素全为零。反之，若 D 中 q-1 个独立支路不形成任一闭合回路，则就排除了上述使 D 为零的情形。

设 D 中第 μ 节点至少被一个独立支路 i 所连通，则 D 的第 μ 行至少有一个非零元素。当 μ 分则取 1、2、…、q-1 时，就排除了因某行元素全是零而使 D 为零的情形。

设 D 线图分解成 Z 个彼此独立的封闭系统，则应从原线图中断开不连续的 Z-1 条独立支路，不论这些断开支路如何分配给哪几个彼此独立的封闭系统，但其中至少有一个封闭系统分不到所断开的独立支路，其内独立支路仍保持不形成任一闭合回路的特性。因为总可以选择使这个封闭系统不含第 q 个节点，设含节点数为 1、2、…、μ，独立支路数为 1、2、…、i。从线图看，此时 D 中 1、2、…、μ 节点仅为 1、2、…、i 独立支路所连通，且因每个电路的电流要在支路两端的节点处出现两次，一次系数为 $+1$，一次系数为 -1，因而 D 的第 1、2、…、μ 行上的元素只在第 1、2、…、i 列的位置上取 $+1$ 和 -1 而在其它各列的位置上均为零。于是，D 的 1、2、…、μ 行相加之和为零使 D 为零。若已假设 D 线图不能分解为几个彼此完全分离的系统，也就排除了上述使 D 为零的情形。因而，本命题三点全部证毕。

以下引入符号定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 \text{ 当 } i\neq j\\ 1 \text{ 当 } i=j\end{cases}$$

又当节点只被一条独立支路接通时，称此节点为这条独立支路的断开点。按节点定义，是三个以上独立或非独立支路汇合在一起的点。

命题二 不论独立支路 i 是否与非独立支路 k' 为邻边，如 i 的一端是断开点，则用 k' 代替 i 后得到的行列式 $D_{k'i}$ 为零。

证明 如图 1 所示，设断开点属节点 μ，因仅为 i 独立支路所连通，则 D 中第 μ 行仅在

第 i 列上有不为零的元素，其它各列元素均为零，亦即

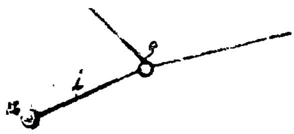

图 1—a　k′ 与 i 为邻边

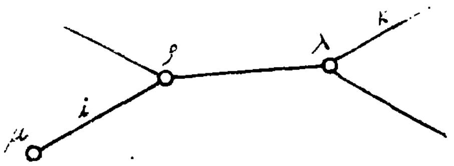

图 1—b　k′ 不与 i 为邻边

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & \cdots & a_{\mu i} & \cdots & \cdots & a_{\mu,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & \cdots & a_{q-1,i} & \cdots & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix}$$

其中第 μ 行元素为：$a_{\mu j}=\delta_{ji}a_{\mu i}$，$a_{\mu i}=\pm 1$。因为非独立支路 k' 不与断开点 μ 连通，因而有 $a_{\mu k'}=0$，则用 $-a_{\mu k'}$ 代替 $a_{\mu i}$ 后得到的行列式 $D_{k'i}$ 为

$$D_{k'i}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & -a_{1k'} & \cdots & \cdots & a_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & \cdots & -a_{q-1,k} & \cdots & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix}$$

可见，在第 μ 行上元素皆为零使 $D_{k'i}=0$。以上证明与 i 独立支路的另一端是否与非独立支路 k' 连通无关，故命题成立。

命题三　若独立支路 i 的一端与非独立支路 k' 连通，另一端与具有断开点的另一条独立支路 j 连通，则用 k' 代替 i 后得到的行列式 $D_{k'i}$ 为零。

证明　如图 2 所示，设 j 的断开点属节点 μ，而 i 与 j 的连通点属节点 ρ，则行列式 D 为

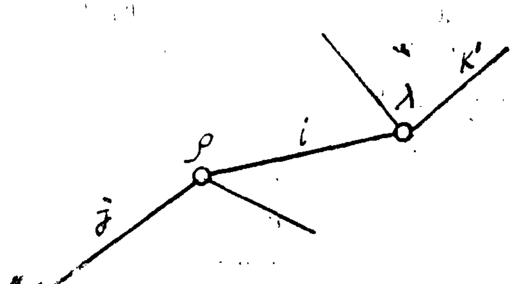

图 2　命题 3 的线图

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu i} & \cdots & a_{\mu j} & \cdots & a_{\mu,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho 1} & \cdots & a_{\rho i} & \cdots & a_{\rho j} & \cdots & a_{\rho,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,i} & \cdots & a_{q-1,j} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix}$$

其中第 μ 行元素为：$a_{\mu i}=\delta_{ij}a_{\mu j}$，$a_{\mu j}=\pm1$，第 ρ 行元素为：$a_{\rho i}=\delta_{ii}a_{\rho i}+\delta_{ij}a_{\rho j}$，$a_{\rho i}=\pm1$，$a_{\rho j}=\pm1$。因为 k' 与节点 ρ 没有连通，因而有 $a_{\rho k'}=0$，则用 $a_{\rho k'}$ 代替 $a_{\rho i}$ 后得到的行列式 $D_{k'i}$ 为

$$D_{k'i}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1k'} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \pm1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \pm1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & -a_{q-1,k'} & \cdots & a_{q-1,j} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix}$$

可见，第 μ 行和第 ρ 行具有完全相同的元素使 $D_{k'i}=0$

若把 i 视为由若干条独立支路 i、j、…、l 首尾连接而成，则得推论如下：由 k' 的一端出发，连接出去若干条 i、j、…、l 独立支路后，如最末一条 l 具有断开点，则用 k' 分别代替中间各条独立支路后得到的相应各行列式 $D_{k'i}=D_{k'j}=\cdots=0$。

命题四[9] 行列式 D 和 $D_{k'i}$ 若不为零必取值 ±1。

命题五 若非独立支路 k' 的一端同时经若干条独立支路连通，则其中必有一条被 k' 代替后 $D_{k'i}$ 不为零的独立支路 i，其余独立支路被 k' 代替后分别得到的各行列式均为零。

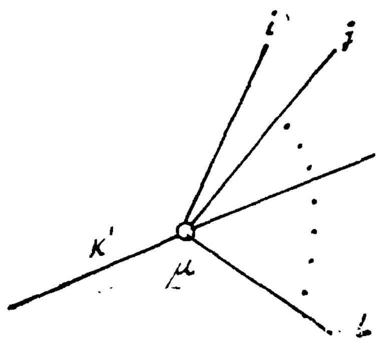

图 3 命题五的线图

证明 如图 3 所示，设 k' 的端点属节点 μ，同时经若干条独立支路 i、j、…、l 所连通，则行列式 D 为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu1} & \cdots & a_{\mu i} & a_{\mu j} & \cdots & a_{\mu l} & \cdots & a_{\mu,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,i} & a_{q-1,j} & \cdots & a_{q-1,l} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix} \tag{11}$$

其中第 μ 行上元素为：$a_{\mu i}=\pm1$，$a_{\mu j}=\pm1$，…，$a_{\mu l}=\pm1$，其余为零。对 D 按 μ 行展开得

$$D=a_{\mu i}\Delta_{\mu i}+a_{\mu j}\Delta_{\mu j}+\cdots+a_{\mu l}\Delta_{\mu l}$$

因 $D\neq0$，故上式至少存在一个不为零的代数余子式，设为 $\Delta_{\mu i}\neq0$。另一方面，节点 μ 也被非独立支路 k' 连通，因而有 $a_{\mu k'}=\pm1$，则用 k' 代替 i 后得到的行列式 $D_{k'i}$ 为

$$D_{k'i}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1k'} & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu1} & \cdots & -a_{\mu k'} & a_{\mu j} & \cdots & a_{\mu l} & \cdots & a_{\mu,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & -a_{q-1,k'} & a_{q-1,j} & \cdots & a_{q-1,l} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

对 $D_{k'i}$ 也按 μ 行展开得

$$D_{k'i}=-a_{\mu k'}\Delta'_{\mu i}+a_{\mu j}\Delta'_{\mu j}+\cdots+a_{\mu l}\Delta'_{\mu l}$$

由式(11)和(12)见到，有 $\Delta'_{\mu i}=\Delta_{\mu i}$。已知 $\Delta_{\mu i}\neq 0$，故亦有 $\Delta'_{\mu i}\neq 0$，且 $a_{\mu k'}=\pm 1$，因而有 $D_{k'i}\neq 0$。可见，一定存在一条被 k' 代替后 $D_{k'i}$ 不为零的独立支路 i。

又知，q-1 个独立支路不得形成任一闭合回路。这就表明如图 4 所示的那样，与 k' 端点 μ 同时连通的若干条独立支路，除存在一种可能绕回到 k' 的另一端点以外，这就是上述的 $D_{k'i}$ 不为零的独立支路 i，还存在二种可能，或且它们本身就具有断开点（如图 4 中的 j 支路），或且接出去几条后，最末的一条端点是断开点（如图 4 中的 l 支路）。则由命题二和命题三知，凡此独立支路分别被 k' 代替后得到的各行列式均为零。

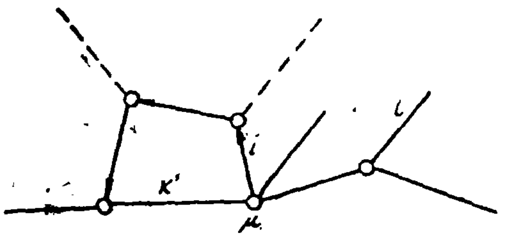

图 4．支路 i 绕回到 k' 的另一端点，虚线表示连通到其它非独立支路端点去的独立支路。

五、独立方程数目

依命题一：　　$A_{k'i}=-\dfrac{D_{k'i}}{D}\neq\infty$。

依命题四：　　$A_{k'i}=0$ 或 ± 1。

依命题五：对确定的某一条非独立支路 k'，式(10)中圆括弧的项表为

$$\sum_{i=1}^{q-1}A_{k'i}\int\vec{K}_i\cdot d\vec{l}_i+\int\vec{K}_{k'}\cdot d\vec{l}_{k'}=\sum_{i=1}^{m}\pm\int\vec{K}_i\cdot d\vec{l}_i+\int\vec{K}_{k'}\cdot d\vec{l}_{k'}=\oint_{l_{k'}}\vec{K}\cdot d\vec{l}\qquad(13)$$

式中 m 是系数 $A_{k'i}$ 不为零的那些独立支路数，凡此支路都不具有断开点，彼此首尾连通，所以必能而且只能与非独立支路 k' 一起组成一个闭合回路 $l_{k'}$。

同理得

$$\sum_{i=1}^{q-1}A_{k'i}\int\rho_i\vec{j}_i\cdot d\vec{l}_i+\int\rho_{k'}\vec{j}_{k'}\cdot d\vec{l}_{k'}=\oint_{l_{k'}}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\qquad(14)$$

以上二式代入式(10)得

$$\sum_{k'=q}^{p}j_{k'}\left(\oint_{l_{k'}}\vec{K}\cdot d\vec{l}-\oint_{l_{k'}}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\right)=0\qquad(15)$$

用式(3)的前一式代入上式的园括孤项得

$$\oint_{l_k}\vec{K}\cdot d\vec{l}-\oint_{l_k}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=-\oint_{l_{k'}}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

按稳恒电流场条件

$$\oint_{l_{k'}}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

因而有

$$\oint_{l_k}\vec{K}\cdot d\vec{l}=\oint_{l_{k'}}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\qquad(16)$$

式中 k' 由式（15）求和的项数所决定，即

$$k'=q、q+1、\cdots、p \tag{17}$$

由式（16）表出的是一组独立方程式。因为在每一个方程中都含有一个不出现在其它方程中的某一条非独立支路 k'，因而每一个方程都不能从其它方程中用加减的方法得到。

由式（17）见到，这组独立方程的数目就是网络中非独立的支路数 k'，而 k' 数目等于 $p-(q-1)$。

依命题一，式（7）同时也给出了 $q-1$ 个独立方程。于是，我们便得到：由式(7)和式(16)提供的独立方程的总数目为 p，等于网络中的支路数。为此，正好确定流经 p 个支路的所有电流 I_1、I_2、…、I_p。

如闭合回路 $l_{k'}$ 由 n 个支路组成，而每个 i 支路包含一个电动势 $\varepsilon_{ik'}$（设电源内阻为 $r_{ik'}$）和与之串联的电阻 $R_{ik'}$。令 $n=m+1$，则式（16）表为

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(\vec{K}_{ik'}\cdot d\vec{l}_{ik'})\varepsilon_{ik'}=\sum_{i=1}^{n}\cos(\vec{j}_{ik'}\cdot d\vec{l}_{ik'})I_{ik'}(R_{ik'}+r_{ik'})$$

$$(k'=q、q+1、\cdots、p) \tag{18}$$

式中

$$\cos(\vec{K}_{ik'}\cdot d\vec{l}_{ik'})=\begin{cases}1\ (\text{当 } d\vec{l}_{ik'} \text{ 平行于 } \vec{K}_{ik'})\\ -1\ (\text{当 } d\vec{l}_{ik'} \text{ 反平行于 } \vec{K}_{ik'})\end{cases} \tag{19}$$

$$\cos(\vec{j}_{ik'}\cdot d\vec{l}_{ik'})=\begin{cases}1\ (\text{当 } \vec{j}_{ik'} \text{ 平行于 } d\vec{l}_{ik'})\\ -1\ (\text{当 } \vec{j}_{ik'} \text{ 反平行于 } d\vec{l}_{ik'})\end{cases}$$

于是，我们也得到由式(7)和式(18)所表达的基尔霍夫第一定律和第二定律每一个独立方程所约束的线性函数形式，而式（19）同时给出基尔霍夫第二定律正负号法则的数学表示[10]。

本文承北京大学曹昌祺教授提了宝贵的意见，特致深切的谢意。

参　考　文　献

〔1〕宋孔德译，基尔霍夫定律（基尔霍夫：关于研究电流线性分布所得到的方程的解），人民出版社，（1981）。

〔2〕Foster. R. M, Geometrical Circuits of Electrical Networks, Transactions of the AIEE, Vol. 51. (1932), 309—317.

〔3〕Ingram, W. H, and Cramlet, C. M, On the Foundations of Electrical Network Theory, Journal of Mathematics and physics, Vol. 23, (1944), 134—155.

〔4〕Lantieri, J, Mēthode de Dētermination des Arbres d'un Rēseau, Annales de Tēlēcommunications, Vol. 5, (1950), 204—208.

〔5〕Percival, W. S, The Solution of Passive Electrical Networks by Means of Mathematical Trees, Journal of the IEE, Part III, Vol. 100, (1953), 143—150.

〔6〕Bayard, M, Thèorie des Rèseaux de Kirchhoff, Editions de la Revue d'optique, (1951)

〔7〕P. 小[illegible]菲尔德等著，肖江译，特勒根定理和网络，科学出版社，（1976），7—16.

〔8〕武汉大学，线性代数，人民教育出版社，（1980），63.

〔9〕宋孔德译，基尔霍夫定律(F. 雷则：网络理论中的一些拓扑学原理)，人民出版社，(1981)，20—22.

〔10〕陈燊年：稳恒电流中能量守恒与转化定律的普遍形式，大学物理，12（1981）.

Applying the Method of Field Theory to Prove the Number of Independent Equation of Kirchhoff's Law

Chen Sinning

Abstract

In this paper we obtain the equations of kirchhoff's law by solving Tellegen's theovem and the law of conservation of charge in the resistance network and by verifying the some relation in the graphs. Therefore, we verify the nvmber of independent equations that is equal to the number of the branch circuits of the network.