第6卷 第1期　　华侨大学学报　　Vol.6 No.1
1985年2月　　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　　Feb.1985

非一致拟线性抛物型方程广义解的极值原理

梁学信

（数　学　系）

本文讨论非一致拟线性抛物型方程和一类方程组的广义解的极值原理，结果由定理2和定理3给出，它们是椭圆型和一致抛物型方程相应结果的推广。

关于一致椭园型方程的一些结果，可以推广到非一致椭园型方程〔1,2〕，最近文〔3〕、〔4〕、〔5〕又进一步推广到退缩线性椭园型方程和非一致线性抛物型方程的广义解。本文讨论非一致拟线性抛物型方程和主部是对角形的非一致拟线性抛物型方程组的广义解，得出解的 L^p 估计及极值原理。

（一）非一致拟线性抛物型方程广义解的极值原理

设 Ω 是 n 维欧氏空间的有界域，$Q=\Omega\times(O,T)$，T 是有限值，在 Q 中考虑方程

$$\int_o^t\int_\Omega\Big[\,\upsilon u_t+\upsilon_{,\alpha}A^\alpha(x,t,u,u_{,\beta})+\upsilon B(x,t,u,u_{,\beta})\Big]dxdt=0 \tag{1}$$

$$t\in(O,T),\quad \upsilon\in\mathring{V}(Q).$$

其中
$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad u_{,\alpha}=\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}.$$

设满足下列条件

$$u_{,\alpha}A^\alpha(x,t,u,u_{,\beta})\geqslant\lambda(x,t)|\nabla_x u|^2-b^2(x,t)u^2-f^2(x,t), \tag{2}$$

$$|B(x,t,u,u_{,\beta})|\leqslant C(x,t)|\nabla_x u|+d(x,t)|u|+g(x,t), \tag{3}$$

$$\lambda(x,t)>0,\quad \lambda^{-1}(x,t)\in L^s{}_{(Q)},\qquad s>\frac{n}{2}. \tag{4}$$

$b(x,t)$，$c(x,t)$，$d(x,t)$，和 $f(x,t)$ 是非负函数，且

$$b^2(x,t),\ c^2(x,t)\lambda^{-1}(x,t),\ d(x,t),\ f^2(x,t),\ g(x,t)\in L^q(Q) \tag{5}$$

$$\frac{1}{q}+\frac{n}{s(n+2)}<\frac{2}{n+2}.$$

下面 $|\nabla_x u|$ 简记为 $|\nabla u|$。

本文1984年8月8日收到。

$V(Q)$ 是 C^1 类函数在范数

$$\|u\|_{V(Q)}=\left\{\int_o^T\int_\Omega\left(\lambda(x,t)\,|\nabla u|^2+u^2\right)dxdt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

下完备化作成的线性空间。

$\mathring{V}(Q)$ 是 $V(Q)$ 的子空间，在 Соболев 意义下满足边值

$$u\Big|_\Gamma=0,$$

$$\Gamma=\left\{(x,t)\,|\,t=0,x\in\Omega\right\}\cup\left\{(x,t)\,|\,x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T\right\}.$$

引理 设 $v\in\mathring{V}(Q)$，则存在 $l=2\left(1+\dfrac{2s-n}{n(s+1)}\right)$, $s>\dfrac{n}{2}$，及不依赖于 v 的常数 $C>0$，使

$$\|v\|_{L^l(Q)}\leqslant C\left(\int_o^T\int_\Omega\lambda(x,t)\,|\nabla v|^2dxdt+\sup_{t\in(0,T)}\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理可用类似于文〔4〕中的引理的证明方法证明。

定理1 设 $u\in\mathring{V}(Q)$ 满足方程 (1)，式 (2) 至 (5) 成立。则存在仅依赖于 n, s, q, $\operatorname{mes} Q$ 及 $\lambda^{-1}(x,t)\in L^s(Q)$, $b^2(x,t)$, $C^2(x,t)\lambda^{-1}(x,t)$, $d(x,t)\in L^q(Q)$ 的范数的常数 $C>0$，使

$$\sup_Q u\leqslant C(\|u\|_{L^2(Q)}+K),$$

其中

$$K=\|f\|_{L^{2q}(Q)}+\|g\|_{L^q(Q)}.$$

定理可用 Moser 迭代方法证明[1]。

证：作函数 $H(w)\in C^1[K,\infty)$,

$$H(w)=\begin{cases}w^p-K^p, & K\leqslant w\leqslant N,\\ pN^{p-1}w+(1-P)N^p-K^p, & w>N.\end{cases}$$

其中

$$P\geqslant1,\ N\geqslant\max(K,1).$$

记
$$u^+=\max(u,o),\ w=u^++K.$$

则函数

$$G(w)=\int_K^w|H'(\tau)|^2d\tau\in\mathring{V}(Q).$$

取 $v=G(w)$，代入式 (1) 有

$$\int_o^t\int_\Omega\left(G(w)w_t+G'(w)w_{,\alpha}A^\alpha(x,t,u,u_{,\beta})+G(w)B(x,t,u,u_{,\beta})\right)dxdt=0,$$

利用式 (2)、(3) 得

$$\int_o^t\int_\Omega\left[G(w)w_t+G'(w)\left(\lambda(x,t)\,|\nabla w|^2-b^2(x,t)\,|u^+|^2-f^2(x,t)\right)\right]dxdt$$
$$\leqslant\int_o^t\int_\Omega G(w)\left[c(x,t)\,|w|+d(x,t)\,|u^+|+g(x,t)\right]dxdt.$$

$$\int_0^t\int_\Omega\Big(G(w)w_t+\lambda G'(w)|\nabla w|^2\Big)dxdt$$
$$\leqslant\int_0^t\int_\Omega\Big[(b^2|u^+|^2+f^2)G'(w)+G(w)(c|\nabla w|+d|u^+|+g)\Big]dxdt.$$

因 $G(w)\leqslant w|H'(w)|^2=wG'(w)$，$u^+\leqslant w$，$K\leqslant w$。所以

$$\int_0^t\int_\Omega\Big(G(w)w_t+\lambda G'(w)|\nabla w|^2\Big)dxdt$$
$$\leqslant\int_0^t\int_\Omega\Big[(b^2w^2+f^2)+w(c|\nabla w|+dw+g)\Big]G'(w)dxdt.$$

应用 Cauchy 不等式，右边不超过

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\lambda G'(w)|\nabla w|^2dxdt$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\Big[\Big(b^2+\frac{c^2}{2\lambda}+d\Big)w^2+gw+f^2\Big]G'(w)dxdt$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\lambda G'(w)|\nabla w|^2dxdt$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\Big(b^2+c^2\lambda^{-1}+d+\frac{g}{k}+\frac{f^2}{k^2}\Big)w^2G'(w)dxdt$$

于是

$$\int_0^t\int_\Omega\Big(G(w)w_t+\frac{\lambda}{2}G'(w)|\nabla w|^2\Big)dxdt$$
$$\leqslant\int_0^t\int_\Omega a(x,t)w^2G'(w)dxdt=\int_0^t\int_\Omega aw^2|H'(w)|^2dxdt,$$

其中

$$a(x,t)=b^2+c^2\lambda^{-1}+d+gk^{-1}+f^2k^{-2};$$

上不等式右边应用 Hölder 不等式得

$$\int_0^t\int_\Omega\Big(G(w)w_t+\frac{\lambda}{2}|\nabla H(w)|^2\Big)dxdt$$
$$\leqslant\|a\|_{L^q(Q)}\|wH'(w)\|^2_{L^{2q/(q-1)}(Q)}.\tag{6}$$
$$\|a\|_{L^q(Q)}\leqslant\|b\|^2_{L^{2q}(Q)}+\|c^2\lambda^{-1}\|_{L^q(Q)}+\|d\|_{L^q(Q)}+2.$$

因 $K\leqslant w\leqslant N$ 时

$$G(w)w_t=\frac{p^2}{2p-1}\Big(w^{2p-1}-k^{2p-1}\Big)w_t,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H^2(w)=2p(w^p-k^p)w^{p-1}w_t,$$

所以

$$G(w)w_t=\frac{p}{2(2p-1)}\frac{\partial H^2(w)}{\partial t}+\frac{p^2k^p}{2p-1}(w^{p-1}-k^{p-1})w_t.$$

代入(6)式左端，因为

$$w^{p-1}-k^{p-1}\geqslant0,$$

只要将 $G(w)w_t$ 的第二项关于 t 的积分，化为关于 w 的积分，便可看出其值大于 0， 将此项

丢掉不等式仍成立，由式(6)便得

$$\frac{p}{2(2p-1)}\int_\Omega H^2(w)dx+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \lambda|\nabla H(w)|^2dxdt$$
$$\leqslant C_1\|\omega H'(w)\|^2_{L^{2q/(q-1)}(Q)},$$

或

$$\frac{1}{4}\int_\Omega H^2(w)dx+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \lambda|\nabla H(\omega)|^2dxdt$$
$$\leqslant c_1\|wH'(w)\|^2_{L^{2q/(q-1)}(Q)}.$$

再由引理得

$$\|H(w)\|_{L^l(Q)}\leqslant c_2\|wH'(w)\|_{L^{2q/(q-1)}(Q)}. \tag{7}$$

式中 $c_1=\|a\|_{L^q(Q)}$， $c_2=2c\sqrt{c_1}$，c 是引理中的常数。

令 $N\longrightarrow\infty$ 上式仍成立，且知由 $w\in L^{2pq/(q-1)}(Q)$ 隐含了 $w\in L^{pl}(Q)$。

式(7)说明

$$\|w^p-k^p\|_{L^l(Q)}\leqslant c_2p\|w^p\|_{L^{2q/(q-1)}(Q)}.$$

因 $p\geqslant 1$，$w\geqslant k$，

所以

$$\|w^p\|_{L^l(Q)}\leqslant c_3p\|w^p\|_{L^{2q/(q-1)}(Q)}.$$

记
$$q^*=\frac{2q}{q-1},\quad \tau=\frac{l}{\frac{2q}{q-1}}=\frac{l}{q^*},$$

那么

$$\|w\|_{L^{p\tau q^*}(Q)}\leqslant(c_3p)^{1/p}\|\omega\|_{L^{pq^*}(Q)}.$$

取 $p=\tau^{\nu-1}$，$\nu=1,2,\cdots$

那么归纳得

$$\|w\|_{L^{\tau^\nu p^*}(Q)}\leqslant(c_3\tau^{\nu-1})^{1/\tau^{\nu-1}}\|w\|_{L^{\tau^{\nu-1}q^*}(Q)}$$
$$\leqslant c_3^{\sum_{m=0}^{\nu-1}\tau^{-m}}\cdot\tau^{\sum_{m=0}^{\nu-1}m\tau^{-m}}\|w\|_{L^{q^*}(Q)}.$$

根据 l，q 满足的关系知 $\tau>1$，所以级数 $\sum_{m=0}^{\infty}\tau^{-m}$，$\sum_{m=0}^{\infty}m\tau^{-m}$ 收敛，令 $\nu\to\infty$ 得

$$\sup_Q w\leqslant c_4\|w\|_{L^{q^*}(Q)},$$

$$c_4=c_3^{\sum_{m=0}^{\infty}\tau^{-m}}\cdot\tau^{\sum_{m=0}^{\infty}m\tau^{-m}}.$$

又对任意的 q'

$$\|w\|_{L^{q'}(Q)}\leqslant(\sup_Q w)(\operatorname{mes}Q)^{1/q'}\ [1],$$

及内插不等式

$$\|w\|_{L^{q^*}(Q)}\leqslant\varepsilon\|\omega\|_{L^{q'}(Q)}+\varepsilon^{-\mu}\|\omega\|_{L^2(Q)},$$

$$2\leqslant q^*\leqslant q',\quad \mu=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q^*}\right)}{\left(\frac{1}{q^*}-\frac{1}{q'}\right)}.$$

取 ε 适当小，便得

$$\sup_Q w\leqslant c_5\|w\|_{L^2(Q)}\leqslant c_5(\|u^+\|_{L^2(Q)}+K).$$

注意到　$w=u^++K$，最后得到

$$\sup_Q u\leqslant c(\|u\|_{L^2(Q)}+K).$$

定理证完.

定理 2　(极值原理)　设 $u\in V(Q)$ 满足方程 (1)，式 (2)至(5)成立，则

$$\sup_Q u\leqslant\sup_\Gamma u+c\bar{k}.$$

其中

$$\bar{k}=M(2\|b\|_{L^{2q}(Q)}+\|d\|_{L^q(Q)})+K,$$

$$M=\sup_\Gamma u,$$

c 仅依赖于 n, s, q, $\operatorname{mes}Q$, 及 $\lambda^{-1}\in L^s(Q)$, b^2, $c^2\lambda^{-1}$, $d\in L^q(Q)$ 的范数.

证：根据定理 1，需要估计 $\|u\|_{L^2(Q)}$.

对函数 $a(x,t)$ 记

$$[a]^R=\begin{cases}a, & |a|\leqslant R,\\ R\operatorname{sign}a, & |a|>R.\end{cases}$$

$$t_R[a]=a-[a]^R.$$

因 $\frac{l}{l-2}=\frac{s(n+2)}{2s-n}<q$, 对 Q 的任意子集 E 有

$$\left(\iint_E|a|^{\frac{l}{l-2}}dxdt\right)^{\frac{l-2}{l}}\leqslant\|a\|_{L^q(Q)}(\operatorname{mes}E)^{\frac{l-2}{l}-\frac{1}{q}},$$

所以

$$\operatorname{mes}\{(x,t)\,|\,|a|>R\}\leqslant\frac{1}{R^{l/(l-2)}}\iint_{\{|a|>R\}}|a|^{\frac{l}{l-2}}dxdt$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{R}\|a\|_{L^q(Q)}(\operatorname{mes}Q)^{\frac{l-2}{l}-\frac{1}{q}}\right\}^{\frac{l}{l-2}}\longrightarrow 0,\quad (R\to\infty).$$

由 Lebespue 积分的绝对连续性知

$$\left(\iint_Q |t_R[a]|^{\frac{l}{l-2}}\,dxdt\right)^{\frac{l-2}{l}} \leqslant \varepsilon(R) \longrightarrow 0, \quad (R\to\infty);$$

所以

$$\iint_Q |t_R[a]|w^2dxdt \leqslant \|w\|^2_{L^l(Q)}\left(\iint_Q |t_R[a]|^{\frac{l}{l-2}}\,dxdt\right)^{\frac{l-2}{l}}$$

$$\leqslant \varepsilon(R)\|w\|^2_{L^l(Q)} \longrightarrow 0, \qquad (R\to\infty).$$

下面估计 $\|w\|_{L^l(Q)}$. 先设 $u\in \mathring{V}(Q)$，令 $u=we^{\mu t}$，$\mu>0$ 常数，由下面确定。代入方程(1)

$$\int_0^t\int_\Omega\Big[\upsilon(w_t+\mu w)+\upsilon_\alpha A^\alpha(x,t,u,u_\beta)+\upsilon B(x,t,u,u_\beta)\Big]dxdt=0$$

以 $\upsilon e^{\mu t}\in \mathring{V}(Q)$ 为试验函数，为书写简单仍记为 υ，则

$$\int_0^t\int_\Omega\Big[\upsilon(w_t+\mu w)+\upsilon_\alpha e^{-\mu t}A^\alpha(x,t,u,u_\beta)+\upsilon e^{-\mu t}B(x,t,u,u_\beta)\Big]dxdt=0$$

取 $\upsilon=w\in\mathring{V}(Q)$ 代入上式得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w^2dx+\int_0^t\int_\Omega\Big[\upsilon w^2+e^{-\mu t}(\lambda|\nabla u|^2-b^2u^2-f^2)\Big]dxdt$$

$$\leqslant\int_0^t\int_\Omega e^{-2\mu t}|u|(c|\nabla u|+d|u|+g)dxdt$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w^2dx+\int_0^t\int_\Omega\lambda|\nabla w|^2dxdt$$

$$\leqslant\int_0^t\int_\Omega\Big[(b^2-\mu)w^2+e^{-2\mu t}f^2\Big]dxdt$$

$$+\int_0^t\int_\Omega w(c|\nabla w|+dw+ge^{-\mu t})dxdt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\lambda|\nabla w|^2dxdt$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\Big[\Big(b^2+\frac{c^2}{2\lambda}+d+\frac{g}{2}-\mu\Big)w^2+f^2+\frac{g}{2}\Big]dxdt$$

将右边第一项移到左边，右边适当放大得

$$\int_\Omega w^2dx+\int_0^t\int_\Omega\lambda|\nabla w|^2dxdt$$

$$\leqslant 2\int_0^t\int_\Omega\Big[(a-\mu)w^2+f^2+g\Big]dxdt,$$

其中

$$a=b^2+c^2\lambda^{-1}+d+g.$$

从而

$$\int_\Omega w^2dx+\int_0^t\int_\Omega\lambda|\nabla w|^2dxdt$$

$$\leqslant 2\int_0^t\int_\Omega\Big[\Big([a]^R-\mu\Big)w^2+|t_R[a]|w^2+f^2+g\Big]dxdt$$

$$\leqslant 2\int_0^t\int_\Omega\left([a]^R-\mu\right)w^2dxdt+2\|t_R[a]\|_{L^{\frac{l}{l-2}}(Q)}\|w^2\|_{L^l(Q)}$$

$$+2(\|f\|^2_{L^{2q}(Q)}+\|g\|_{L^q(Q)})(\mathrm{mes}\,Q)^{1-\frac{1}{q}}.$$

先取 $R=R_0$ 适当大，使右边第二项 $\|w\|^2_{L^l(Q)}$ 的系数小于 $\frac{1}{2c^2}$（c 是引理中的常数），再取 $\mu=\mu_0\geqslant R_0$，使右边第一项非正，那么由引理便得

$$\|w\|^2_{L^l(Q)}\leqslant 4c^2(\|f\|^2_{L^{2q}(Q)}+\|g\|_{L^q(Q)})(\mathrm{mes}\,Q)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant 4c^2(\|f\|^2_{L^{2q}(Q)}+\|g\|^2_{L^q(Q)})(\mathrm{mes}\,Q)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant c_1^2K^2.$$

式中 $c_1^2=4c^2(\mathrm{mes}\,Q)^{1-\frac{1}{q}}$，并不失一般性，设 $\|g\|_{L^q(Q)}\geqslant 1$。

所以

$$\|w\|_{L^l(Q)}\leqslant c_1K,$$

$$\|u\|_{L^l(Q)}\leqslant c_1e^{\mu_0T}K.$$

现在证明一般的情况。如果 $u\in V(Q)$ 满足方程（1），设

$$u^+=\max(u-M,O),\ M=\sup_\Gamma u,$$

那么 $u^+\in\mathring{V}(Q)$。

因 $u>M$ 时，$u^+=u-M$，所以 $u>M$ 时

$$u^+{}_{,\alpha}A^\alpha(x,t,u,u_{,\beta})\geqslant\lambda|\nabla u^+|^2-b^2|u^++M|^2-f^2$$

$$\geqslant\lambda|\nabla u^+|^2-2b^2|u^+|^2-(2M^2b^2+f^2).$$

$$|B(x,t,u,u_{,\beta})|\leqslant C|\nabla u^+|+d|u^++M|+g$$

$$\leqslant c|\nabla u^+|+d|u^+|+|M|d+g.$$

记　$\bar{k}=\sqrt{2}|M|\|b\|_{L^{2q}(Q)}+\|f\|_{L^{2q}(Q)}+|M|\|d\|_{L^q(Q)}+\|g\|_{L^q(Q)}$.

设　$w=u^++K$，那么根据 u^+ 所满足的不等式，如同定理1可证存在常数 $c>0$，使

$$\sup_Q u^+\leqslant c(\|u^+\|_{L^2(Q)}+\bar{k}).$$

又从本定理前部分的证明看出

$$\|u^+\|_{L^l(Q)}\leqslant c_1e^{\mu_0T}\bar{k}.$$

结合这两个不等式得

$$\sup_Q u^+\leqslant c(c_1e^{\mu_0T}\bar{k}+\bar{k})=\bar{c}\bar{k},$$

$$\bar{c}=c(c_1e^{\mu_0T}+1).$$

于是

$$\sup_Q u \leqslant M + \bar{c}k$$

就为所证。

（二）一类非一致拟线性方程组解的先验估计

在 Q 中考虑方程组

$$\int_0^t\int_\Omega\left[\varphi^i u_t^i + \varphi^i{}_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i{}_{,\beta} + \varphi^i a^i(x,t,u,u_{,\beta})\right]dxdt = 0, \tag{8}$$

$$\forall t \in (O,T), \varphi^i \in \mathring{V}(Q), i = 1,2,\cdots m.$$

$$u = (u^1,\cdots,u^m).$$

设满足下面条件：

$a^{\alpha\beta}(x,t,u) = a^{\beta\alpha}(x,t,u)$，且

$$a^{\alpha\beta}(x,t,u)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \lambda(x,t)|\xi|^2,\quad \xi \in E^n, \tag{9}$$

$$\lambda(x,t) > 0,\ \text{且}\ \lambda^{-1}(x,t) \in L^S{}_{(Q)},\quad S > \frac{n}{2}. \tag{10}$$

$$|a^i(x,t,u,u_{,\beta})| \leqslant b(x,t)|\nabla u| + d(x,t)|u| + g(x,t), \tag{11}$$

$b(x,t)$，$d(x,t)$，$g(x,t)$ 是非负函数，且

$$d(x,t),\ b^2(x,t)\lambda^{-1}(x,t),\ g(x,t) \in L^q{}_{(Q)}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{n}{s(n+2)} < \frac{2}{n+2}.$$

式中
$$|u| = \left(\sum_{i=1}^m (u^i)^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad |\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^m\sum_{\alpha=1}^n (u^i{}_{,\alpha})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理3 设 $u \in V(Q)$ 满足方程组 (8)，式 (9) 至 (12) 成立。如果 $\sup_\Gamma |u| = M$，那么存在仅依赖于 n，m，q，s，$\operatorname{mes} Q$ 及 $\lambda^{-1}(x,t) \in L^S{}_{(Q)}$，$b^2(x,t)\lambda^{-1}(x,t)$，$d(x,t)$，$g(x,t) \in L^q{}_{(Q)}$ 的范数的常数 $c > 0$，使

$$\sup_Q |u|^2 \leqslant M^2 + cK$$

成立。其中

$$K = M^2(\|b^2\lambda^{-1}\|_{L^q{}_{(Q)}} + \|d\|_{L^q{}_{(Q)}} + \|g\|_{L^q{}_{(Q)}}) + \|g\|_{L^q{}_{(Q)}}.$$

证：设 $w = |u|^2 = \sum_{i=1}^m (u^i)^2$.

在式 8 中取 $\varphi^i = 2u^i v, v \in \mathring{V}(Q)$，$v \geqslant 0$，那么 w 满足下面的不等

$$\int_0^t\int_\Omega\left(vw_t + v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x,t,u)\,w_{,\beta}\right)dxdt$$

$$= -2\int_0^t\int_\Omega v\left[a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i{}_{,\alpha}u^i{}_{,\beta} + u^i a^i(x,t,u,u_{,\beta})\right]dxdt$$

$$\leqslant -2\int_0^t\int_\Omega \lambda v|\nabla u|^2 dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_0^t\int_\Omega \upsilon|u|(b|\nabla u|+d|u|+g)dxdt\\
&\leqslant -2\int_0^t\int_\Omega\left(\lambda-\frac{\lambda}{2}\right)\upsilon|\nabla u|^2dxdt\\
&+2\int_0^t\int_\Omega\upsilon\left[\left(\frac{b^2}{2\lambda}+d\right)\omega+\sqrt{w}\,g\right]dxdt\\
&<2\int_0^t\int_\Omega\upsilon\left[(b^2\lambda^{-1}+d+g)w+g\right]dxdt
\end{aligned}
$$

设

$$Z=\operatorname{mex}(w-M^2,O),\quad M=\sup_\Gamma|u|,$$

那么由 $\max(|u|-M,O)\in\mathring{V}(Q)$ 知 $Z\in\mathring{V}(Q)$，且满足不等式

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega\left(\upsilon z_t+\upsilon_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x,t,u)\,z_{,\beta}\right)dxdt\\
&\leqslant c\int_0^t\int_\Omega\upsilon\left(\bar{d}(x,t)z+\bar{g}\right)dxdt.
\end{aligned}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&\bar{d}(x,t)=b^2\lambda^{-1}+d+g\in L^q(Q),\\
&\bar{g}(x,t)=M^2(b^2\lambda^{-1}+d+g)+g\in L^q{}_{(Q)}.
\end{aligned}
$$

用类似于定理 1，2 的证明方法可证得

$$\sup_Q z\leqslant c(\|z\|_{L^2(Q)}+K),$$

及 $\|z\|_{L^1(Q)}$ 的估计，二者结合便得

$$\sup_Q z\leqslant\bar{c}K.$$

于是最后得

$$\sup_Q|u|^2\leqslant\sup_\Gamma u^2+ck.$$

其中

$$k=M^2(\|b^2\lambda^{-1}\|_{L^q(Q)}+\|d\|_{L^q(Q)}+\|g\|_{L^q(Q)})+\|g\|_{L^q(Q)}.$$

常数 $c>0$ 仅依赖于 n，m，p，s，$\operatorname{mes}Q$ 及 $\lambda^{-1}(x,t)\in L^s{}_{(Q)}$，$b^2(x,t)\lambda^{-1}(x,t)+d(x,t)+g(x,t)\in L^p{}_{(Q)}$ 的范数，并为简单起见，依赖于这些量的常数这里都统一用 c 或 $\bar{c}$ 表示。

参　考　文　献

〔1〕Gilberg, D. and Trudinger N. S, Elliptic partial differential epuation of second order, (1977).

〔2〕Trudinger, N. S, Maximum principles for linear, nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients, Math. Zeit, 157(1977), 291—310.

〔3〕宰联昆，退缩椭圆型方程的边值问题，数学学报，27:1(1984)，69—81.

〔4〕梁学信、梁汲廷、吴在德、于鸣岐，非一致二阶线性抛物型方程广义解的弱最大值原理，华侨大学学报，2（1982），9—12.

〔5〕梁汲廷、吴在德，非一致抛物型方程的广义解，数学学报，26：5（1983），630—640.

Maximum Principle for the Generalized Solutions of Quasi-Linear Nonuniformly Parabolic Epuations

Liang Xuexin

Abstract

In this paper we discuss the maximum principle for the generlized solutions of quasi-linear nonuniformly parabolic equations and a type systems. the results are giver in Theorem 2 and Theorem 3, Which are extensions of the corresponding results of elliptic and uniformly parapolic equations.