第6卷 第1期　　华 侨 大 学 学 报　　Vol.6 No.1
1995年2月　　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　　Feb.1985

关于AOR方法的收敛性

曾 文 平

（数 学 系）

摘　　要

A. Hadjidimos 于1978年在文〔1〕中提出一个迭代求解线性方程组的AOR方法（Accelerated Overrelaxation Method），他及 M. M. Martins[3] 和陈培贤[2] 相继在各种系数矩阵的条件下，讨论了此方法的收敛性。本文考虑系数矩阵为一般矩阵，正定对称矩阵以及M-矩阵的情况，进一步讨论其收敛性，扩充了他们的结果。

（一）引　　言

A. Hadjidimos 于1978年在文〔1〕中提出一个迭代求解线性方程组

$$AX = b \tag{1}$$

的AOR方法(又称为 $M_{r,\omega}$ 方法)：

$$(D - rA_L)X^{(m+1)} = \left\{(1-\omega)D + (\omega - r)A_L + \omega A_U\right\}X^{(m)} + \omega b \tag{2}$$

$$(\omega \neq 0,\ m = 1, 2, \cdots.)$$

其中 $A \equiv D - A_L - A_U$ 是 $N \times N$ 实矩阵，D 为非奇异对角矩阵，A_L 和 A_U 分别是严格的下、上三角矩阵，r 和 ω 是实参数. 它的迭代矩阵是

$$\begin{aligned} L_{r,\omega} &= (D - rA_L)^{-1}\left\{(1-\omega)D + (\omega - r)A_L + \omega A_U\right\} \\ &= (I - rL)^{-1}\left\{(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$L = D^{-1}A_L,$$
$$U = D^{-1}A_U.$$

A. Hadjidimos 并在文〔1〕中，对方程组的系数矩阵为不可约对角占优，L-矩阵和相容有序矩阵的情况，讨论了此方法的收敛性。继而，M. M. Martins[3] 于1980年对严格对角占优矩阵，陈培贤[2] 于1983年对H矩阵、正定对称矩阵及 L 矩阵等情况讨论了此方法的收敛性。本文在此基础上，对一般矩阵、正定对称矩阵、M-矩阵以及H-矩阵的情况，进一步讨论了此方法的收敛性，扩充了他们的结果。

本文1984年9月16日收到。

（二）任 意 矩 阵

考虑方程组

$$X = BX + C \tag{4}$$

其中设
$$B = L + U \tag{5}$$

这里L为严格下三角矩阵，U为上三角矩阵。其 AOR 迭代格式为

$$(I - rL)X^{(m+1)} = \left\{(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U\right\}X^{(m)} + \omega c \tag{6}$$

其中$\omega \neq 0$，ω、r 均为实数，$m = 0,1,2,\cdots$。令

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ b_{21} & 0 & & \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots & b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^T$，则式 (5) 的分量形式为

$$x_l^{(m+1)} = r\sum_{j=1}^{l-1} b_{lj}x_j^{(m+1)} + (1-\omega)x_l^{(m)} + (\omega - r)\sum_{j=1}^{l-1} b_{lj}x_j^{(m)} + \omega\sum_{j=l}^{n} b_{lj}x_j^{(m)} + \omega c_l \tag{7}$$

由此可证明如下定理：

定理 1 若存在置换 $T_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$及一组正数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$使以下不等式成立：

$$\begin{aligned} &|1-\omega| + |\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1 i_k}| \leqslant \mu_1 < 1 \\ &|r|\ |b_{i_2 i_1}|\mu_1 + |1-\omega| + |\omega - r|\,|b_{i_2 i_1}| + |\omega|\sum_{k=2}^{n}|b_{i_2 i_k}| \leqslant \mu_2 < 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &|r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_n i_k}|\mu_k + |1-\omega| + |\omega - r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_n i_k}| + |\omega|\,|b_{i_n i_n}| \leqslant \mu_n < 1 \end{aligned} \tag{8}$$

则对与原方程组 (4) 等价的方程组

$$x_{i_j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i_j i_k}x_{i_k} + c_{i_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4'}$$

进行如下的 AOR 迭代

$$x_{i_j}^{(m+1)} = r\sum_{k=1}^{j-1} b_{i_j i_k}x_{i_k}^{(m+1)} + (1-\omega)\,x_{i_j}^{(m)} + (\omega - r)\sum_{k=1}^{j-1} b_{i_j i_k}x_{i_k}^{(m)} + \omega\sum_{k=j}^{n} b_{i_j i_k}x_{i_k}^{(m)} + \omega c_{i_j} \tag{7'}$$

收敛，其敛速估计为

$$|x_{i_j}^{(K)}-\tilde{x}_{i_j}|\leqslant\frac{1+\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}\tilde{\mu}^k\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_{i_j}^{(1)}-x_{i_j}^{(0)}| \tag{9}$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $\tilde{x}_{i_j}$，$x_{i_j}^{(k)}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 分别是式 (7′) 的精确解和第 k 次近似解，$\tilde{\mu}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\mu_j$。

证明：令 $\varepsilon_{i_j}^{(m)}=\tilde{x}_{i_j}-x_{i_j}^{(m)}$，则 $\varepsilon_{i_j}^{(m)}$ 满足如下方程组：

$$\varepsilon_{i_j}^{(m+1)}=r\sum_{k=1}^{j-1}b_{i_ji_k}\varepsilon_{i_k}^{(m+1)}+(1-\omega)\varepsilon_{i_j}^{(m)}+(\omega-r)\sum_{k=1}^{j-1}b_{i_ji_k}\varepsilon_{i_k}^{(m)}+\omega\sum_{k=j}^{n}b_{i_ji_k}\varepsilon_{i_k}^{(m)} \tag{10}$$

记 $\alpha=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\varepsilon_{i_j}^{(0)}|$，用数学归纳法证明：

当 $m=0$ 时，式 (10) 成为

$$\varepsilon_{i_j}^{(1)}=r\sum_{k=1}^{j-1}b_{i_ji_k}\varepsilon_{i_k}^{(1)}+(1-\omega)\varepsilon_{i_j}^{(0)}+(\omega-r)\sum_{k=1}^{j-1}b_{i_ji_k}\varepsilon_{i_k}^{(0)}+\omega\sum_{k=j}^{n}b_{i_ji_k}\varepsilon_{i_k}^{(0)} \tag{11}$$

当 $j=1$ 时，从式 (11) 有：

$$|\varepsilon_{i_1}^{(1)}|\leqslant|1-\omega||\varepsilon_{i_1}^{(0)}|+|\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1i_k}||\varepsilon_{i_k}^{(0)}|$$

$$\leqslant\left\{|1-\omega|+|\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1i_k}|\right\}\alpha\leqslant\mu_1\alpha\leqslant\tilde{\mu}\alpha.$$

当 $j=2$ 时，从式 (11) 有：

$$|\varepsilon_{i_2}^{(1)}|\leqslant|r||b_{i_2i_1}||\varepsilon_{i_1}^{(1)}|+|1-\omega||\varepsilon_{i_2}^{(0)}|+|\omega-r||b_{i_2i_1}||\varepsilon_{i_1}^{(0)}|+|\omega|\sum_{K=2}^{n}b_{i_2i_k}||\varepsilon_{i_k}^{(0)}|$$

$$\leqslant\left\{|r||b_{i_2i_1}|\mu_1+|1-\omega|+|\omega-r||b_{i_2i_1}|+|\omega|\sum_{K=2}^{n}|b_{i_2i_k}|\right\}\alpha$$

$$\leqslant\mu_2\alpha\leqslant\tilde{\mu}\alpha$$

……

当 $j=n$ 时，从式 (11) 有

$$|\varepsilon_{i_n}^{(1)}|\leqslant|r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ni_k}||\varepsilon_{i_k}^{(1)}|+|1-\omega||\varepsilon_{i_n}^{(0)}|+|\omega-r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ni_k}||\varepsilon_{i_k}^{(0)}|+|\omega||b_{i_ni_n}||\varepsilon_{i_n}^{(0)}|$$

$$\leqslant\left\{|r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ni_k}|\mu_k+|1-\omega|+|\omega-r|\sum_{K=2}^{n-1}|b_{i_ni_k}|+|\omega||b_{i_ni_n}|\right\}\alpha$$

$$\leqslant\mu_n\alpha\leqslant\tilde{\mu}\alpha.$$

记 $\tilde{\mu}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\mu_j<1$

设 $m=l$ 时有 $|\varepsilon_{i_k}^{(l)}|\leqslant\tilde{\mu}^l\alpha\ (k=1,2,\cdots,n)$，则当 $m=l+1$ 时有

$$|\varepsilon_{i_1}^{(l+1)}|\leqslant|1-\omega||\varepsilon_{i_1}^{(l)}|+|\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1i_k}||\varepsilon_{i_k}^{(l)}|$$

$$\leqslant|1-\omega|\tilde{\mu}^l\alpha+|\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1i_k}|\tilde{\mu}^l\alpha$$

$$=\left\{|1-\omega|+|\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1i_k}|\right\}\bar{\mu}^l\alpha$$

$$\leqslant\mu_1\bar{\mu}^l\alpha\leqslant\bar{\mu}^{l+1}\alpha.$$

$$|\varepsilon_{i_2}^{(l+1)}|\leqslant|r\|b_{i_2i_1}\|\varepsilon_{i_1}^{(l+1)}|+|1-\omega\|\varepsilon_{i_2}^{(l)}|+|\omega-r\|b_{i_2i_1}\|\varepsilon_{i_1}^{(l)}|+|\omega|\sum_{k=1}^{n}|b_{i_2i_k}\|\varepsilon_{i_k}^{(l)}|$$

$$\leqslant|r\|b_{i_2i_1}|\mu_1\bar{\mu}^l\alpha+|1-\omega|\bar{\mu}^l\alpha+|\omega-\alpha\|b_{i_2i_1}|\bar{\mu}^l\alpha+|\omega|\sum_{k=2}^{n}|b_{i_2i_k}|\bar{\mu}^l\alpha$$

$$=\left\{|r\|b_{i_2i_1}|\mu_1+|1-\omega|+|\omega-r\|b_{i_2i_1}|+|\omega|\sum_{k=2}^{n}|b_{i_2i_K}|\right\}\bar{\mu}^l\alpha$$

$$\leqslant\mu_2\bar{\mu}^l\alpha\leqslant\bar{\mu}^{l+1}\alpha$$

……

$$|\varepsilon_{i_n}^{(l+1)}|\leqslant|r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ji_k}\|\varepsilon_{i_k}^{(l+1)}|+|1-\omega\|\varepsilon_{i_n}^{(l)}|+|\omega-r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ni_k}\|\varepsilon_{i_k}^{(l)}|+|\omega\|b_{i_ni_k}\|\varepsilon_{i_k}^{(l)}|$$

$$\leqslant\left\{|r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ji_k}|\mu_k+|1-\omega|+|\omega-r|\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ni_k}|+|\omega\|b_{i_ni_k}|\right\}\bar{\mu}^l\alpha$$

$$\leqslant\mu_n\bar{\mu}^l l\leqslant\bar{\mu}^{l+1}\alpha.$$

故对一切自然数 m，有 $|\varepsilon_{i_k}^{(m)}|\leqslant\bar{\mu}^m\alpha$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 因 $0<\bar{\mu}<1$，

故 $0\leqslant\lim\limits_{m\to\infty}|\varepsilon_{i_k}^{(m)}|\leqslant\lim\limits_{m\to\infty}\bar{\mu}^m\alpha=0$ $(k=1,2,\cdots,n)$。从而证明了 AOR 迭代程序（7′）的收敛性。

敛速估计

$$|x_{i_j}^{(k)}-\bar{x}_{i_j}|\leqslant\sum_{p=1}|x_{i_j}^{(k+p)}-x_{i_j}^{(k+p-1)}|$$

$$=\frac{(1+\bar{\mu})\bar{\mu}^k}{1-\bar{\mu}}\max_{1\ j\ n}|x_{i_j}^{(1)}-x_{i_j}^{(0)}|$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

推论 1 当 $r=0$，$\omega=1$ 时为 Jacbi 迭代，其收敛的充分条件为

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|b_{i_ji_k}|<1$$

这是大家所熟知的，

推论 2 当 $r=1$，$\omega=1$ 时为 Gauss-Seidel 迭代，其收敛的充分条件为

$$\sum_{k=1}^{n}|b_{i_1i_k}|\leqslant\mu_1<1$$

$$|b_{i_2i_1}|\mu_1+\sum_{k=2}^{n}|b_{i_2i_k}|\leqslant\mu_2<1$$

……

$$\sum_{k=1}^{n-1}|b_{i_ni_k}|\mu_k+|b_{i_ni_n}|\leqslant\mu_n<1$$

这就是文〔6〕中定理1的条件。

推论 3　当 $r=\omega$ 时为 SOR 迭代，其收敛的充分条件为

$$\begin{cases} |1-\omega| +\omega\sum_{k=1}^{n} |b_{i_1 i_k}| \leqslant \mu_1 <1 \\ \omega |b_{i_2 i_1}| \mu_1 + |1-\omega| +\omega\sum_{k=2}^{n} |b_{i_2 i_k}| \leqslant \mu_2 <1 \\ \cdots\cdots \\ \omega \sum_{k=1}^{n-1} |b_{i_n i_k}| \mu_{n-1} + |1-\omega| +\omega | b_{i_n i_k}| \leqslant \mu_n <1 \end{cases}$$

（三）对称正定矩阵

设 A 对称正定，且 $A=D-E-F$，其中 E 为严格下三角矩阵，$F=E^T$ 为严格上三角矩阵，D 为对角阵，则有如下

定理 2　设 A 对称正定，则

（i）当　$0<\omega\leqslant r<2$　时，AOR 方法收敛；

（ii）当　$2\leqslant r<\omega$　时，AOR 方法发散；

（iii）当　$0\leqslant r<\omega<2$　时，若 $\lambda_{0,1}\geqslant 0$ 时，则 AOR 方法收敛；

（iV）若　$\lambda_{0,1}<0$ 时，则当 $r\geqslant 0$ 及 $\omega+\dfrac{2-\omega}{\min\lambda_{0,1}}<r<\omega<2$ 时，AOR 方法收敛，其中 $\lambda_{0,1}$ 为 Jacobi 迭代阵的特征值。

证明：对矩阵 $A=D-E-F$ 的 AOR 迭代阵为

$$L_{r,w}=(D-rE)^{-1}\left\{(1-\omega)D+(\omega-r)E+\omega F\right\} \tag{12}$$

设 $\lambda_{r,w}$ 为 $L_{r,w}$ 的任一特征值，Y 为与之相应的特征向量，则

$$\lambda_{r,w}(D-rE)Y=\left\{(1-\omega)D+(\omega-r)E+\omega F\right\}Y \tag{13}$$

$$\because \quad A=D-E-F=D-E-E^T$$

$$\therefore \quad D-rE=\frac{1}{2}\left[(2-r)D+r(A-E+E^T)\right]$$

又

$$\begin{aligned}&(1-\omega)D+(\omega-r)E+\omega F\\ &=\frac{1}{2}\left\{(2-r)D-\omega(A+E-E^T)-(\omega-r)(A-E+E^T)\right\}\end{aligned}$$

所以式 (13) 可化为

$$\begin{aligned}&\lambda_{r,\omega}\left[(2-r)D+r(A-E+E^T)\right]Y\\ &=\left\{(2-r)D-\omega(A+E-E^T)-(\omega-r)(A-E+E^T)\right\}Y\end{aligned} \tag{14}$$

由于 A 对称正定，则

$$\bar{y}^T Ay=a>0,\quad \bar{y}^T Dy=d>0,\quad \bar{y}^T(E-E^T)y=iq$$

用 $\bar{y}^T$ 乘式 (14) 便得

$$\lambda_{r,\omega} = \frac{(2-r)d + ra - 2\omega a - irq}{(2-r)d + ra - irq} \tag{15}$$

由迭代法的收敛性与迭代矩阵谱半径关系知，当

$$|\lambda_{r,\omega}|^2 = \frac{\left\{\left[(2-r)d + ra\right] - 2\omega a\right\}^2 + r^2q^2}{\left[(2-r)d + ra\right]^2 + r^2q^2} < 1 \tag{16}$$

AOR 方法收敛；而当 $|\lambda_{r,\omega}| > 1$ 则 AOR 方法发散。式 (16) 成立即意味着下式成立：

$$-4\omega a\left[(2-r)d + ra\right] + 4\omega^2a^2 < 0$$

或

$$\omega a\left\{(\omega - r)a - (2-r)d\right\} < 0 \tag{17}$$

由此可见

（i）当　$0 < \omega \leqslant r < 2$　时，上式恒成立，$|\lambda_{r,\omega}| < 1$ 则 AOR 方法收敛。

（ii）当　$\omega > r \geqslant 2$　时，式 (17) 左边恒正，$|\lambda_{r,\omega}| > 1$ 则 AOR 方法发散。

当　$0 \leqslant r < \omega < 2$　时，先考虑 a/d 的含意。由式 (15) 知，当 $r = 0$，$\omega = 1$ 时，即 Jacobi 迭代矩阵的任一特值

$$\lambda_{0,1} = \frac{2d - 2a}{2d} = 1 - \frac{a}{d}$$

所以

$$\frac{a}{d} = 1 - \lambda_{0,1}$$

而由式 (17) 知，当 $0 \leqslant r < \omega < 2$ 时，式 (17) 化为

$$\frac{2-r}{\omega - r} > \frac{a}{d} = 1 - \lambda_{0,1}$$

此即

$$\lambda_{0,1} > 1 - \frac{2-r}{\omega - r} = \frac{\omega - 2}{\omega - r} \tag{18}$$

由此可见：

（iii）当　$\lambda_{0,1}$ 非负时，上式恒成立，故收敛条件为

$$0 \leqslant r < \omega < 2$$

（iV）当　$\lambda_{0,1}$ 为负时，式 (18) 可化为

$$\omega - 2 < (\omega - r)\lambda_{0,1} = \omega\lambda_{0,1} - r\lambda_{0,1}$$

即

$$r\lambda_{0,1} < \omega\lambda_{0,1} - \omega + 2$$

或

$$r > \omega + \frac{2-\omega}{\lambda_{0,1}}$$

注意，$\lambda_{0,1}$ 为 Jacobi 迭代矩阵的所有特征值，所以要上式成立，必须

$$r > \omega + \frac{2-\omega}{\min\lambda_{0,1}}$$

从而得：若 $\lambda_{0,1} < 0$ 时，收敛条件为

$$r\geqslant 0 \quad 及 \quad \omega+\frac{2-\omega}{\min\lambda_{0,1}}<r<\omega<2$$

情况 (iii)、(iV) 即文〔2〕中关于正定矩阵情况所得的结论，而证明工具却较为初等。

(四) M - 矩阵

设 $A=(a_{ij})=D-E-F$ 为实 $n\times n$ 矩阵，且对所有的 $i\neq j$ 都有

$$a_{ij}\leqslant 0 \qquad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots n) \tag{19}$$

若 A 非奇异且 $A^{-1}\geqslant 0$ 则称 A 为 M-矩阵。这是在偏微分方程数值解及奇异摄动数值解中应用得较为广泛的一类矩阵。

首先任何 M-矩阵必是 L 矩阵。为此，只要证明 A 的主对角元 $a_{ii}>0$。事实上，若令 $A^{-1}=(\alpha_{ij})$，则因 $AA^{-1}=I$，所以有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\alpha_{ki}=1 \tag{20}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

然而由条件 (19) 及 $A^{-1}\geqslant 0$ 我们有

$$a_{ii}\alpha_{ii}=1-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_{ik}\alpha_{ki}\geqslant 1 \tag{21}$$

因为 $\alpha_{ii}\geqslant 0$，从而对所有的 i 均有 $a_{ii}>0$。

其次我们有如下两个结论，即

引理 1　如果 A 是 L 矩阵，则 A 是 M 矩阵当且仅当 $\rho(B)<1$。其中 $B=D^{-1}(E+F)$ 即为 A 的 Jacobi 迭代矩阵(证明见文〔4〕，从略)。

由此可见，A 为 M 矩阵的充要条件为 $\rho(B)=\rho(L_{0,1})<1$。

引理 2　如果 A 是 L 矩阵，则对所有满足 $0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant 1$ $(\omega\neq 0)$ 的 $M_{r,\omega}$ 方法收敛，当且仅当 $M_{0,1}$ 方法收敛(证明见〔1〕，从略)。从而立即可得如下的

定理 3　如果 A 是 M-矩阵，则对所有满足 $0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant 1$ $(\omega\neq 0)$ 的 $M_{r,\omega}$ 方法 (AOR 方法) 均收敛。

参　考　文　献

〔1〕A. HADJIDIMOS, Accelerated Overrelaxation Method, Math. Comp, 32,141 (1978), 149—157.

〔2〕陈培贤，AOR 方法的收敛性，计算数学，5，1 (1983)，66—71

〔3〕M. Madalena Martins, On an Accelerated Overrelaxation Iterative Method for Linear System With Strictly Diagonally Dominanal Matrix, Math. Comp, 35 (1980), 1269—1273.

〔4〕D, M, Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, New york, (1971).

〔5〕R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, New Jersey, (1962).

〔6〕廖晓昕，关于 Gauss—Seidel 迭代收敛的新判据，计算数学1，5 (1979).

On Convergence of AOR Method

Zeng Wenping

Abstract

In 1978, A. Hadjidimos [1] proposed an iterative method of solving system of linear equation—Accelerated Overrelaxation Method. Its convergence under vorious coefficient matrices discussed by A. Hadjidimos [1] and M. M. Martins [3] and chen pei-xian [2]. In this paper, we consider the coefficient matrices are general, symmetric positive deffinite and M-matrices and further discuss their convergence and extend their results.

对撞锁模Nd:YAG激光器的研究

对撞锁模（CPM）是最近三年才发展起来的一种激光微微秒技术，人们已用微微秒技术来研究物理与化学的微观过程。

我们在大量的CPM实验中发现，在不同浓度的五甲川染料中存在较有规律的锁模阈值。另外在某些浓度中也存在非锁模阈值及多脉冲激光阈值。各种浓度染料的小信号透过率可直接用我们找出的经验公式：$T_0 = e^{-\frac{\alpha_0}{M}l}$ 算出，α_0为原液的线吸收系数，若5mg五甲川加10ml二氯乙烷原液，其α_0为$120cm^{-1}$，M为原液的稀释倍数，l为染料盒厚度。计算值与实验值基本符合。

我们在CPM实验中发现该技术的锁模稳定性较好，脉宽窄，它的脉冲比一般被动锁模缩窄的速度要快7—8倍，由于它还具有调整方便等优点，所以CPM技术对我们今后开展的研究工作打下了良好的基础。

（物理系近代光学研究室）