

## Glimm 格式中的真空问题与 随机序列的等式分布性

林 龙 威

(数 学 系)

### 提 要

本文就 Lagrange 坐标下均熵流气体动力学方程组的初值问题, 研究 Glimm 格式的真 空 问 题。多年来, 正是这个真空问题成为用 Glimm 方法做理论研究的一个主要障碍。本文就初值是只发出稀疏波的 Lip-连续函数 这个基本情形, 证明了如果 Glimm 格式中所取的序列是均匀等分布的, 那么在任意有界域内, 只要步长充分小, 就不会出现真空, 除非一开始就出现真空。

(一) 研究双曲型守恒律组的一个主要方法是 Glimm 方法<sup>[1]</sup>。无论做数值计算还是进行理论研究, Glimm 格式都是主要工具。

Glimm 格式用在计算机上卓有成效, 但用来做理论研究时, 却遇到一个原则性困难。为使 Glimm 近似解逼近所求的广义解, 需要所选取的随机序列是等分布的<sup>[1, 2]</sup>。这个要求在计算上容易实现。但是在理论研究中迄今还没有用上“所选的随机序列是等分布”这个条件。譬如为了证明广义解存在时, 本来只需证明仅由等分布序列所构造的 Glimm 近似解族具有紧致性就够了, 但是迄今所有的研究都是讨论由任意序列构造的 Glimm 近似解族的紧致性。由于只有在很特殊的条件下后者才具有所需的紧致性, 所以只有在很特殊的条件下才证明了广义解是存在的。

对 Lagrange 坐标下均熵流气体动力学方程组的初值问题

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, & u_t + p(v)_x = 0, & (-\infty, \infty) \times (0, \infty), & (E) \\ [u(x, 0), v(x, 0)] = [u_0(x), v_0(x)], & (-\infty, \infty), & (I) \end{cases}$$

其中  $p(v) \in C^2(0, \infty), p'(v) < 0, p''(v) > 0, \lim_{v \rightarrow \infty} p(v) = 0,$

$$\int_1^\infty \sqrt{-p'(v)} dv < \infty \quad (C)$$

由非等分布序列构造的 Glimm 近似解可能含有真空状态。多年来, 正是这个真空问题成为用 Glimm 方法做理论研究的一个主要障碍。如文<sup>[3]</sup>所指出: “当接近真空时, 波的相互作用产生强烈的非线性效应, 以至 Glimm 的存在定理不能用——其中的主要估计失效。这个

本文 1984 年 4 月 23 日收到。

困难的克服将是解决“大”初值问题的主要步骤。”

我们知道，在 Glimm 格式中，真空状态只有当异类稀疏波相互作用时才可能出现。本文讨论在初始时刻只发出稀疏波的初值问题。如所周知，在条件

$$\left\{ (r, s) \mid r_0(-\infty) \leq r \leq r_0(\infty), \quad s_0(-\infty) \leq s \leq s_0(\infty) \right\} \subset \Omega(V) \tag{V}$$

下，其中  $\Omega = \left\{ (r, s) \mid r - s < 2 \int_1^\infty \sqrt{-p'(v)} dv \right\}$ ， $r$  与  $s$  是 Riemann 不变量

$$r(u, v) = u + \int_1^v \sqrt{-p'(v)} dv, \quad s(u, v) = u - \int_1^v \sqrt{-p'(v)} dv,$$

且 
$$r_0(x) \equiv r(u_0(x), v_0(x)), \quad s_0(x) \equiv s(u_0(x), v_0(x)).$$

由任意序列构造的 Glimm 近似解族一致有界（自然不出现真空），且具紧致性，从而证明初值问题存在整体有界的整体连续解。现有整体连续解的存在定理<sup>[4-7]</sup>都是在条件 (V) 下得到的。但是，条件 (V) 是一个很强的条件，通常很容易不被满足。当初值不满足条件 (V) 时，由序列  $\alpha = (0, 0, \dots)$  构造的 Glimm 近似解就出现真空状态。因此，人们倾向于相信，对一般初值问题，为了保证 Glimm 近似解不出现真空（甚至广义解不出现真空），类似于条件 (V) 的条件是必须的。如果事实果真如此，用 Glimm 方法研究一般“大”的初值问题广义解的存在性将是极其困难的问题。

可喜的是事实并非如此，上面取的序列  $\alpha = (0, 0, \dots)$  不是等分布的，本文证明了，如果所取的序列是均匀等分布的，那么在任意有界域内，只要步长充分小，就不会出现真空（除非在初始瞬间就出现真空），而且 Glimm 近似解族局部一致有界，所得的解局部有界，局部 Lip-连续。

作者在文<sup>[8]</sup>中用折线逼近法得到类似的存在性结果。

**(二) 定义** 我们说序列  $a \equiv \{a_m\}$  在区间  $(-1, 1)$  中均匀等分布，如何任给  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N(\varepsilon) > 0$ ，使得当  $n > N(\varepsilon)$ ，

$$\left| \frac{B(j, n, I)}{n} - \frac{\mu(I)}{2} \right| < \varepsilon, \tag{D}$$

对任意正整数  $j$  与区间  $(-1, 1)$  中的任意区间  $I$  成立，其中  $B(j, n, I)$  表示满足条件

$$a_m \in I, \quad j \leq m \leq j + n - 1,$$

的  $m$  的个数， $\mu(I)$  是区间  $I$  的长度，正整数  $N(\varepsilon)$  仅依赖于  $\varepsilon$ ，与  $j, I$  无关。

设  $l$  和  $h$  分别是 Glimm 格式的  $x$  方向和  $t$  方向的步长， $(u_k(x, t, a), v_k(x, t, a))$  是初值问题 (E)、(I) 的由随机序列  $a$  所构造的 Glimm 近似解。记  $f_k^{(n)} \equiv f(kl, nh, a)$ ，其中  $f = u, v, r, s$ 。

**引理** 对给定的非负整数  $n$ ，若对所有的  $k, k + n =$  偶数，都有

$$0 \leq r_{k+2}^{(n)} - r_k^{(n)} \leq b, \quad 0 \leq s_{k+2}^{(n)} - s_k^{(n)} \leq b,$$

那么

$$0 \leq r_{k+1}^{(n+1)} - r_{k-1}^{(n+1)} \leq b, \quad 0 \leq s_{k+1}^{(n+1)} - s_{k-1}^{(n+1)} \leq b, \quad \Phi_n < \Phi(\infty) - \frac{b}{2}.$$

且

$$0 \leq \Phi_{n+1} - \Phi_n \leq \frac{b}{2},$$

其中  $\Phi \equiv \sup_l \Phi_k^{(n)}$ ， $k + n =$  偶数， $\Phi_k^{(n)} \equiv \Phi[v_k^{(n)}]$ ， $\Phi(v) \equiv \int_1^v \sqrt{-p'(s)} ds$ 。

本引理不难根据 Glimm 格式的定义证明。

**定理** 设  $u_0(x)$  有界,  $0 < v_* \leq v_0(x) \leq V_0$ , Lip-连续, 且满足条件

$$|\Phi[v_0(x_2)] - \Phi[v_0(x_1)]| \leq u_0(x_2) - u_0(x_1), \quad x_1 < x_2, \quad (M_1)$$

即

$$r_0(x_1) \leq r_0(x_2), \quad s_0(x_1) \leq s_0(x_2), \quad x_1 < x_2, \quad (M_2)$$

如序列  $a \equiv \{a_n\}$  在区间  $(-1, 1)$  上均匀等分布, 对给定  $T > 0$ , 当步长  $h > 0$  充分小,

( $\delta \equiv \frac{1}{h} \geq \lambda_*$ ,  $\lambda_* \equiv \sqrt{-p'(v_*)}$ ,  $\delta$  是常数), 那么初值问题 (E)、(I) 的 Glimm 近似解  $(u_h(x, t, a), v_h(x, t, a))$  在带域  $(-\infty, \infty) \times [0, T]$  中对  $h$  一致有界。

**证** 任给  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , 取充分大的正整数  $N, M, N > N(\varepsilon_1)$ , 其中

$$\varepsilon \equiv \varepsilon \delta^{-1} \Phi'(V_0 + 2LT), \quad (1)$$

$$\frac{M}{LT} > \text{Max} \left\{ 4C, \quad \text{Max}_{V_0 \leq v \leq V_0 + 3/2LT} \frac{\Phi'(v) + \Phi'(V_0 + 2LT)}{\Phi(V_0 + 2LT) - \Phi(v)} \right\}, \quad (2)$$

其中

$$C \equiv \frac{\Phi'(V_0) + \Phi'(V_0 + 2LT)}{[\Phi'(V_0 + 2LT)]^2} \text{Max}_{V_0 \leq v \leq V_0 + 2LT} [-\Phi''(V)],$$

$L$  是  $r_0(x)$  与  $s_0(x)$  的 Lip-常数,  $N(\varepsilon_1)$  见均匀等分布的定义。令

$$\tau = \frac{T}{M}, \quad h = \frac{\tau}{N} = \frac{T}{MN}, \quad \lambda_0 \equiv \sqrt{-p'(V_0)} \equiv \Phi'(V_0), \quad I_0 \equiv (-\lambda_0 \delta^{-1}, \lambda_0 \delta^{-1}),$$

由式 (D),

$$0 \leq N_1 \equiv B(0, N, I_0) \leq N(\lambda_0 \delta^{-1} + \varepsilon_1), \quad (3)$$

在引理中取  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . 连续用引理  $N$  次, 注意 Glimm 格式中初值的取法与  $L$  的定义, 可知引理中的  $b = 2Ll$ . 设

$$V_1 \equiv \text{Sup}_{0 \leq i \leq N_h} v_h(x, t, a),$$

由式 (3)、(1) 与式 (2),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Phi(V_1) - \Phi(V_0) \leq N_1 L l \\ &\leq L I N \delta^{-1} [\Phi'(V_0) + \varepsilon \Phi'(V_0 + 2LT)] \\ &= \frac{LT}{M} [\Phi'(V_0) + \varepsilon \Phi'(V_0 + 2LT)] \\ &\leq \Phi(V_0 + 2LT) - \Phi(V_0), \end{aligned} \quad (4)$$

又因为  $\Phi'(v) = \sqrt{-p'(v)} > 0$ , 所以

$$V_0 \leq V_1 \leq V_0 + 2LT.$$

由于

$$\begin{aligned} \Phi(V_1) - \Phi(V_0) &\geq (V_1 - V_0) \Phi'(V_1) \\ &\geq (V_1 - V_0) \Phi'(V_0 + 2LT), \end{aligned} \quad (5)$$

代入式 (4),

$$0 \leq V_1 - V_0 \leq \frac{LT}{M} \left[ \frac{\Phi'(V_0)}{\Phi'(V_0 + 2LT)} + \varepsilon \right],$$

得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Phi'(V_0) - \Phi'(V_1) = (V_1 - V_0)[- \Phi''(\theta)] \\ &\leq \frac{LT}{M} \left[ -\frac{\Phi'(V_0)}{\Phi'(V_0 + 2LT)} + \varepsilon \right] \max_{V_0 \leq v \leq V_0 + 2LT} [-\Phi''(v)], \end{aligned}$$

其中  $V_0 < \theta < V_1$ , 于是

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\Phi'(V_0)}{\Phi'(V_1)} - 1 \leq \frac{LT}{M} \left\{ \frac{\Phi'(V_0) + \Phi'(V_0 + 2LT)}{[\Phi'(V_0 + 2LT)]^2} \right\} \max_{V_0 \leq v \leq V_0 + 2LT} [-\Phi''(v)] \\ &= \frac{LTC}{M}. \end{aligned} \quad (6)$$

把式(5)代入式(4), 并注意式(6),

$$\begin{aligned} 0 < V_1 - V_0 &\leq \frac{LT}{M} \left[ -\frac{\Phi'(V_0)}{\Phi'(V_1)} + \varepsilon \frac{\Phi'(V_0 + 2LT)}{\Phi'(V_1)} \right] \\ &\leq \frac{LT}{M} \left[ 1 + \frac{LTC}{M} + \varepsilon \right] \end{aligned}$$

由于  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ,  $\frac{M}{LT} > 4C$ , 故

$$0 \leq V_1 - V_0 \leq \frac{LT}{M} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \leq \frac{3}{2} LT.$$

即

$$V_0 \leq V_1 \leq V_0 + \frac{3}{2} LT.$$

由式(2), 得

$$\frac{LT}{M} \leq \frac{\Phi(V_0 + 2LT) - \Phi(V_1)}{\Phi'(V_1) + \Phi'(V_0 + 2LT)}$$

注意序列  $\{a_m\}$  是均匀等分布的, 同理可证.

$$V_0 \leq V_k \leq V_0 + \frac{3}{2} LT,$$

$$\frac{LT}{M} \leq \frac{\Phi(V_0 + 2LT) - \Phi(V_k)}{\Phi'(V_k) + \Phi'(V_0 + 2LT)},$$

$k = 1, \dots, M$ , 其中  $V_k \equiv \sup_{0 \leq t < kN_k} v_k(x, t, a)$ ,

因而

$$0 \leq V_M - V_0 \leq LT \left( 1 + \frac{LTC}{M} + \varepsilon \right), \quad (7)$$

这就证明了  $v_k(x, t, a)$  在带域  $(-\infty, \infty) \times [0, T]$  中对  $h$  一致有界. 至于  $u_k(x, t, a)$  的一致有界性是显然的.

**推论** 若初值(I)满足定理的条件, 那么初值问题(E)、(I)存在  $Lip$ -连续解  $(u(x, t), v(x, t))$ , 且

$$V_0 \leq \sup_{0 \leq t < T} v(x, t) \leq V_0 + LT. \quad (8)$$

**证** 由定理易知 Glimm 近似解族是紧致的. 仿文[2], 容易证明其极限函数是解, 且是  $Lip$ -连续的, 由式(7)可得式(8).

**注** 当初值  $u_0(x) = u_0 + Lx$ , ( $L \geq 0$ ),  $v_0(x) \equiv v_0$ , 式(8)右边取等号.

作者在访问美国马里兰大学期间, 和刘太平教授对本文作了多次有益的讨论。特向刘教授致谢。感谢郑永树老师为本文付出的许多劳动。

### 参 考 文 献

- [1] Glimm J., Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 695—715.
- [1] Liu T. P. The deterministic version of the Glimm scheme, *Comm. Math. Phys.*, 57 (1977) 135—148.
- [3] Liu T. P. and Smoller J. A., On the vacuum state for the isentropic gas dynamics equations, *Adv. Appl. Math.*, 1 (1980), 345—359.
- [4] 林龙威, 可约化准线性双曲型方程组的整体连续解的存在性, *吉林大学学报 (自然科学版)*, 4 (1963), 83—96.
- [5] J. L. Johnson, Global continuous solutions of hyperbolic systems of quasilinear equations, *Bull. Amer. Math.*, 73 (1967), 639—641.
- [6] M. Yamaguti and T. Nishida, On the some global solution for quasi-linear hyperbolic equations, *Funkcial Evac*, 11 (1968), 51—57.
- [7] D. Hoff, A constructive theory for shock-free, isentropic flow, *J. Diff. Equ.*, 38 (1980), 1—31.
- [8] L. W. Lin, On the vacuum state for the equations of isentropic gas dynamics (to appear).

# The Vacuum State and the Equidistribution of the Random Choice for Glimm's Scheme

Lin Longwei

## Abstract

Consider the initial value problem

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 & v_t + p(v)_x = 0, & (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)), & (-\infty, \infty) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(E)} \\ \text{(I)} \end{matrix}$$

where  $p(v) \in C^2(0, \infty)$ ,  $p'(v) < 0$ ,  $p''(v) > 0$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} p(v) = 0$ .

Let  $l, h$  are the mesh lengths of the  $x$ -direction and the  $t$ -direction with the Glimm's scheme, the approximate solution  $(u_h(x, t, a), v_h(x, t, a))$  is constructed inductively according to a prechosen sequence  $a \equiv \{a_m\}$ ,  $a_m \in (-1, 1)$ .

**Theorem** Let  $u_0(x), v_0(x)$  be bounded,  $0 < v_* \leq v_0(x) \leq V_0$ , Lipschitz continuous and satisfying the condition

$$|\Phi[v_0(x_2)] - \Phi[v_0(x_1)]| \leq u_0(x_2) - u_0(x_1), \quad x_1 < x_2$$

If the sequence  $a \equiv \{a_m\}$  is uniformly equidistributive in the interval  $(-1, 1)$ ,

For given  $T > 0$ , as  $h$  are sufficiently small ( $\delta \equiv \frac{l}{h} \geq \lambda_* > 0$ ,  $\lambda_* \equiv \sqrt{-p'(v_*)}$ ,  $\delta$  is a constant). Then the approximate solutions  $(u_h(x, t, a), v_h(x, t, a))$  are uniformly bounded in the strip  $(-\infty, \infty) \times (0, T)$ .

**Corollary** If the initial data (I) satisfy the conditions of the theorems, then the initial value problem (E), (I) exists a global Lipschitz continuous solution  $(u(x, t), v(x, t))$ , and

$$V_0 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} v(x, t) \leq V_0 + LT.$$