

十八世纪的数学物理

曾景春

(物理系)

十八世纪是物理学消化和扩展牛顿力学成果的时期,是数学分析建树的年代,这两方面工作互相依赖,互相促进,为数学物理或理论物理开创了研究的方法,为十九世纪理论物理的发展做了重要的准备。

十八世纪的前半叶,英国学派对于微积分学贡献不大,但在欧洲大陆,微积分学得到很大的发展。最主要的代表人物有伯努利家族,欧勒,以及法国的一大批数学家如达兰贝,拉格兰日,拉普拉斯等人。他们以微积分学为工具,研究物理问题。他们的一项首要任务是推进牛顿力学,把牛顿用几何方法描述的力学改用分析的方法来处理。

我们知道,牛顿写的《自然哲学数学原理》一书,尽管他的构思是用微积分的方法,但是整部著作却是用几何的证明来描述的。这种表述形式不能明显的反映物体在运动中的瞬变状态,而且几何的证明又显得十分繁琐和晦涩。时至今日,它一直是一本很难读懂的著作。甚至牛顿同时代的科学家,如克拉克也认为读这本书是很费力气的。特别是他提出的一些基本原理,都不是用数学语言表述的,这对于力学原理进一步通过数学演绎扩展于新的领域难免要受到限制。

微积分的思想内容同代数的表述形式的结合,即研究无限小量变化规律的分析学,在欧洲大陆兴起后,数学家们开始着手用这种新的数学方法来表述牛顿的力学。最先是欧勒(1703—1783),他于1736年发表的《力学或运动学分析》一书中,把牛顿第二定律用笛卡尔坐标中作用力分量与坐标二阶微分的形式:

$$Fx = M \frac{d^2x}{dt^2}; \quad Fy = M \frac{d^2y}{dt^2}; \quad Fz = M \frac{d^2z}{dt^2}$$

来表述。因为牛顿第二定律是力学的核心,这个表述使牛顿力学基本原理可以用分析的方法来处理、推广。即把物体受力与运动状态的变化归结为解微分方程。这就为后来拉格兰日(1730—1813)建立分析力学铺平了道路。

用分析的方法取代几何的方法,其中一个重要任务就是寻找自然哲学(在当时就是力学)的最简洁、最基本的原理,并且用数学的语言表述这基本的原理。达兰贝在1743年,发表《动力学》(Traite de Dynamique)一书,提出一个以他的名字命名的原理:“任何刚体系统内部作用和反作用,保持平衡。”这个原理可以使动力学问题的处理大为简化。而对后来影响最大的,还是莫培督,他在1750年发表的《宇宙论》(Essai de Cosmologie)提出最小作用量原理:“自然界总是通过简单的方法产生其作用的。如果一个物体没有任何阻碍地从一点到另一点,它就得利用最短的途径和最快的速度来引导它”。就是说,自然界中任何时候

发生的任何变化,总是使变化中所耗费的作用量尽可能的小。他并且认为从这个基本原理出发,可以导出一切力学定律,莫培督认为自然界的作用量可以用质点的质量、速度和路程三者的乘积来度量。他通过碰撞,杠杆平衡,光在不同媒质中传播等现象,籍这个基本原理导出与之相关的定律,证明这个原理是普遍适用的。欧勒在和莫培督的通信中,赞同莫培督的观点。并对这个原理作更精确的表述,即表达成变分的形式: $\delta \int v ds = 0$ 。它的含义是:

如果物体由一点运动到另一点,可以设想有好几条可能的轨道,但是其中只有满足 $\int v ds$ 为最小的那条是真实的轨道。他后来又把 $\delta \int v ds$ 改为 $\delta \int v^2 dt$ 。在这个变动的基础上,拉格兰日将最小作用量原理表述为 $\delta \int m v^2 dt = 0$ 或 $\delta \int T dt = 0$ 。这样一来,最小作用量的原理的物理意义就比较显明了。它就是“活力”的时积为极值。十九世纪以后,活力才被认识到,它正是现在所指的动能。

拉格兰日从1767到1787的二十年间,完成了他的专著《分析力学》。在这部著作中,他认为力学这门科学,可以整个儿建立在最小作用量原理基础上,借助于变分法演绎出所有力学定律,把力学问题表述为微分方程,借数学以求方程的解,这和牛顿用几何证明的方法大相径庭。他因此自豪地宣称,他的这本著作,可以不必引用任何一幅几何图形。

他最先引进“势”的概念,用以代替牛顿力学中的力。如质点在力的作用下运动,而力可以用由某个函数 V 导出来。则根据最小作用量原理,可以导出拉格兰日方程。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) + \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

这个方程相当于牛顿第二定律。

他还进一步引入广义坐标 q_1, q_2, \dots , 代替直角坐标。并使 T 成为 \dot{q}_i , q_i 的函数, V 为 q_i 的函数。由此他导出了方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

这个以广义坐标与广义动量为变量的方程,显示出更大的优越性。它可以把运动纳入方便的坐标系;它将把物体运动所受的约束大大简化;它用 T 、 V 这种函数代替了力,为力学扩展应用于其他领域准备了新的概念。

拉格兰日还从上述的基本原理出发,导出了有关天体运动,有关刚体和流体运动的定律。力学问题在他手头,抹掉了从天上到地面,从固体到液体这些形态上的差异。它们的作用与运动都由一个基本原理连续地演绎导出。他再一次推进了物理科学的统一。他的《分析力学》是十八世纪数学物理最辉煌的典范。它原理这么简洁,演绎这样连贯,方程这样对称,把自然科学优雅、清晰、和谐的特征,呈示给人类。他的后继者 W. 哈密顿称颂这本《分析力学》是一首优美的诗。

数学物理家们的第二个任务是研究天体力学。这其中最杰出的代表人物是拉普拉斯(1749—1827年)。他自己宣称,他研究数学的根本目的是利用数学这个工具去解决物理问题。他在二十四岁时,就发表了不少重大的研究成果,比如他曾经用分析的方法解决了欧勒和拉格兰日竞相努力而未解决的土星、木星轨道偏差的问题。由于他在天体力学方面的成就,被誉

称为“法国的牛顿”。从1779年到1805年的二十六年间，完成了五大卷的《天体力学》。通过分析的方法导出万有引力定律，研究服从这个自然定律的太阳系所有的力学问题。包括行星运动的主要方程；土星环的形状与转动；太阳、月球和各行星之间的摄动作用；地球表面的潮汐现象；地球运动的岁差现象等。他关于行星运动的微扰理论，在方法上成为后来物理学家研究原子过程的借鉴。特别是他从数学力学上论证了太阳系的结构，指出其中99.87%的质量集中在太阳上，而行星之间的摄动又是这么微小，从而保证了各行星可以按椭圆轨道永久地运动下去。整个太阳系，按照大自然这样巧妙的安排而稳定如斯。在《论宇宙体系》的一文中的一个附录里，他以力学的观点，提出了著名的“星云假说”。论述了整个太阳系是一个漫长历史中从星云的旋转和凝聚中演化出来的。这个假说的胆略和论证的逻辑力，给后代留下深刻的影响。恩格斯评价这个学说，是对牛顿时代形成的僵硬自然观一个重大的冲击。

他研究椭球(地球正是这样的一个系统)的引力问题。这个问题的难点在于它不像圆球体那样，可以把全球对空间某点的引力归结为球心对该点的作用，他必须克服前人难以克服的数学困难。因此，当他完成这个课题时，以不可抑制的喜悦宣布了他的发现：一个椭球体在任何方向的吸引力，可以藉微分某个单一函数而获得。这个单一函数 V 沿某个方向的微分正是引力沿这个方向的分量。对这个函数 V ，1828年格林给予定名为“势”。

1782年，拉普拉斯更导出了在天体外部空间里这个势函数满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

这个方程不仅适用于引力场。后来高斯等人在磁的研究中，静电研究中和热的研究中也用到它。即成为经典场论的基本方程之一，它就是有名的拉普拉斯方程。

十八世纪的数学物理学家还以浓厚的兴趣考察振动和波动的过程。欧勒在二十岁的时候就研究声学，写了不少这方面的文章。许多数学家如伯努利等人，也许出于雅尚，都著力研究音乐，研究乐器发声机理。为了研究乐器，首先是研究最简单的弦的振动，研究气柱的振动，进而研究振动体发声后，声波如何在介质中传播。这又必然要涉及有关可压缩气体和流体的力学性质的研究。1746年，达兰贝在《张紧的弦振动时形成的曲线研究》中，导出了一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

欧勒在《论声的传播》论文中，提出三维波动方程：

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

乐器上一条发声的弦，它本来是有重量，有弹性，並以一定方式固结在乐器上的。数学家先把它简化成一条完全柔软的弦，它由均匀分布的互相牵连的质点所组成，它无端无限，不受重力作用，不会因形变引起弹力，唯一的是质点间存在的拉伸的张力。研究在这种力作用下，弦的一小段在一瞬间的起伏到紧接着的下一瞬间起伏的变化，从而揭示出弦振动的因果联系。这种联系就表述为形如上述达兰贝的一维波动方程。如果研究的是发声体向空间四方八面传送声音，则有欧勒的三维波动方程。这些方程反映理想的弦，无耗损的声波运动的“共性”。而实际发声的各种管弦，它们既遵循共同的规律，又各具自己的特性。数学物理学家又按各种特定条件，研究这些实际的过程，提出不同处理的方法。如研究两端固定弦的

振动(Taylor); 研究离散质量情况的弦的振动(*J. Bernoulli*); 研究弹性弦的振动, 可变粗细弦的振动(*D. Alembert*); 研究连续水平重绳的横振动(*Euler*)……。他们在理想的弦振动的规律上, 附加上特定的条件, 求方程的特解, 揭示各种实际的弦振动的规律。

这些研究指出, 许多物理过程都可以找到相应的微分方程。一个类型的微分方程往往可以概括不同领域里的物理过程。研究与寻找物理问题的微分方程, 探索这些方程在不同条件下得出的解, 就成为理论物理的中心任务。

十八世纪, 数学物理学家借助于微分方程把流体力学从静力学研究推进到流体动力学的研究。欧勒和拉格兰日把流体看作是由易动的微小粒子组成的力学体系, 并从力学的基本原理出发导出了流体的一般动力学方程。而在理论上和实用上最有价值的是丹聂尔·伯努利(1700—1782)于1738年在他的《Hydrodynamica》(流体力学)一书中, 提出有名的伯努利方程, $p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gy = \text{常数}$ 。它的实质是用能量守恒的原理揭示稳定流动液体在各个位置上流量、流速与压力的关系。

欧勒和拉格兰日虽然都把流体看成易动质点组成的力学体系, 但两人采用不同的方法。拉格兰日的方法是跟踪运动流体各质点在各瞬间在空间各点的物理量的变化; 欧勒则不去跟踪各个质点, 而是着眼于整个流体空间, 赋予各点不同的物理量。这两种描述法是等价的。但欧勒的方法在一些问题上数学处理比较简便。十八世纪流体力学的成就, 它导出的一些数学方程, 不仅是流体力学继续发展的基础, 而且为十九世纪人们处理电学、磁学、热学问题, 提供了基础理论和基本方法。

由此时发现的波动方程, 流体力学方程, 加上十九世纪、二十世纪发现的诸如扩散方程, 热传导方程, 麦克斯韦方程, 薛定谔的波动方程等。通称为数学物理方程。理论的物理学同数学的这种紧密的结合, 以致在十九世纪, 人们把理论物理等同于偏微分方程的研究。

十八世纪数学物理的成就, 体现并发挥了科学家自古以来所谓的“毕达哥拉斯主义”的倾向。毕达哥拉斯主义者深信, 要洞察宇宙结构的奥秘, 必须通过数学。数学的和谐, 正是宇宙结构的反映。伽里略在《试验者》一文中说: 宇宙这本巨书是用数学的语言写成的。它的文字是三角形、圆以及其他几何图形。没有这些图形, 人们甚至根本不可能理解这部书的一个词。开普勒也说过: “对外部世界进行研究的主要目的在于发现上帝赋予它的合理次序与和谐。而这些是上帝以数学语言透露给我们的”。牛顿在他的《自然哲学数学原理》一书中, 则把这种倾向表达成物理学的根本方法。他说, “我在这本书里, 培育数学直至它联系到哲学[科学]时为止……所以我献出这本书作为哲学的数学原理”。他认为用数学研究哲学的基本方法就是“从现象中寻找出力的数量和性质, 并且把我们在简单情形下发现的东西作为原理, 通过数学方法, 估计这些原理在较复杂情形下的效果”。如果说, 十八世纪之前, 伽里略, 开普勒, 牛顿窥探“上帝创世”的语言, 还仅仅是几何的图形及其证明, 那么, 十八世纪的数学物理学家, 由于使用分析的语言, 因而把牛顿规定的研究方法, 发挥得淋漓尽致, 并取得卓著的成效。以致于拉普拉斯可以豪迈地宣称, 如果在创造世界的时候, 世界的状态便被一个有无限精力而又无限勤勉的数学家, 把它最微小的细节全部都记录下来, 这位数学家便能推断出整个世界的未来历史。

十八世纪数学物理学家承续的是牛顿力学的研究纲领。他们也像开普勒, 牛顿那样, 以

一种虔诚的宗教感情寻找蕴含于大自然之中的普遍原理,以便由其演绎出各方面的定律。经由达兰贝、莫佩督、拉格兰日等人努力而创立的最小作用量原理,使当时诸力学过程的规律在这普遍原理之下统一起来。特别是经过十九世纪英国的W·哈密顿的发展,阐明了作用量的本质,建立了概括性更高的哈密顿原理,并被应用于一系列非力学的过程。在二十世纪更成为从经典力学向量子力学过渡的桥梁。它被普朗克称颂为自然规律中最概括的一个原理。

从此寻找支配自然界的普遍原理和绝对规律,以便由此演绎出整个自然界的图象,就成为理论物理学家们高尚的探索动力

十八世纪数学物理遵循的是牛顿力学的纲领。它根植于牛顿力学的土壤,但它的成果却为改变以质点间超距作用为基本假设的牛顿力学,为十九世纪场的理论的建立,不自觉地作着准备。拉普拉斯引进势的概念,把引力归结为空间位势的变化;欧勒把物理量赋予流体空间的各个点;科希把固体看成连续介质,它的力学量按空间连续分布的函数来处理。这些研究方式,开始时都是出于数学处理的方便,但结果却以数学自身的逻辑力量,以空间连续分布的场和场的作用,取代以分离的质点和超距的力为基础的牛顿力学。为十九世纪理论物理的新分支:场论的诞生,做了概念上和方法上的准备。

参 考 文 献

- [1] S·E·Whiplaker, 《A history of the theories of Aether and Electricity》
- [2] M·克莱因, 《古今数学思想》(Ⅱ.Ⅲ), 上海科技出版社。
- [3] W·C·丹皮尔著, 李斯译, 《科学史》, 商务印书馆。
- [4] J·L·Lagrange, 《principle of virtual velocities》, 转自《A source book in physics》, P61.
- [5] 爱因斯坦, 《牛顿力学及其对理论物理学发展的影响》, 载于《爱因斯坦论著选编》, 上海人民出版社。
- [6] 爱因斯坦, 《探索的动机》, 载于《爱因斯坦论著选编》, 上海人民出版社。
- [7] 《The Encyclopædia Britannica》(第9版), VOL.14.
- [8] 拉普拉斯, 《宇宙体系论》, 上海译文出版社, 1978, 第一版 476 页, 附录七。