一类拟线性抛物型方程组解的先验估计

梁 学 信

（数 学 系）

文〔1〕讨论了主部是对角型的二阶线性抛物型方程组，在系数是光滑有界的条件下的极值原理。本文利用类似于〔2〕的方法，讨论下面形状的拟线性抛物型方程组(1)的广义解，得出解 $\max\limits_{Q}|u|$ 的估计，它也是〔3〕中有关结果的推广。

一、 预 备 引 理

设 Ω 是 n 维欧氏空间中的有界域，$\partial\Omega$ 为其边界，记

$$Q=\Omega\times(O,\ T),\quad S=\left\{\partial\Omega\times(O,\ T)\right\}\cup\left\{(x,\ t)\,\Big|\,X\in\Omega,\ t=0\right\}.$$

在 Q 中讨论下面形状的抛物型方程组

$$\int_{o}^{t}\int_{\Omega}\left\{\varphi^{i}u_{t}^{i}+\varphi,{}_{\alpha}^{i}a^{\alpha\beta}(x,\ t,\ u)u,{}_{\beta}^{i}+\varphi^{i}a^{i}(x,\ t,\ u,\ u_{x})\right\}dxdt=0 \tag{1}$$

$$\forall t\in(O,\ T),\quad \varphi^{i}\in\overset{\circ}{V}(Q),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

其中 $u=(u^{1},u^{2},\cdots,u^{m})\in W_{2}^{1}(Q)$，$W_{2}^{1}(Q)$ 是通常的 Соболев 空间。$\overset{\circ}{V}(Q)$ 是 $W_{2}^{1}(Q)$ 的子空间，它的函数在 Соболев 意义下满足边界条件

$$u\Big|_{S}=0.$$

其中
$$u_{t}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad u,{}_{\alpha}=\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}.$$

并记
$$|u|=\left(\sum_{i=1}^{m}(u^{i})^{2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad |\nabla xu|=\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(u^{i},{}_{\alpha})^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

假定 $a^{\alpha\beta}(x,\ t,\ u)=a^{\alpha\beta}(x,t,u)$ 且满足

$$\lambda|\xi|^{2}\leqslant a^{\alpha\beta}(x,t,u)\xi^{\alpha}\xi^{\beta} \tag{2}$$

$\lambda>0$ 是常数，$\xi\in E^{n}$。

我们将利用下面的引理

引理1[2]　设 $w\in \mathring{V}(Q)$，那么 $w\in L^{l}{}_{(Q)}$，$l=2(1+2/n)$，并且存在不依赖于 w 的常数 $c>0$，使

$$\|w\|_{L^l(Q)}\leqslant c\left\{\int_0^T\int_\Omega |\nabla_X w|^2dxdt+\sup_{t\in(O,T)}\int_\Omega w^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

引理2　设 $w\in \mathring{V}(Q)$ 满足下面不等式

$$\int_0^t\int_\Omega\left\{vw_t+v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x,t,u)w_{,\beta}\right\}dxdt\leqslant c\int_O^t\int_\Omega v\Big(d(x,t)w+f(x,t)\Big)dxdt \tag{3}$$

$$\forall t\in(O,T),\forall v\in \mathring{V}(Q)$$

$c>0$ 是常数，函数 $a^{\alpha\beta}(x,t,u)$ 满足条件(2)，$d(x,t)$，$f(x,t)$ 是非负函数，且满足

$$d(x,t),f(x,t)\in L^p{}_{(Q)},\quad p>n/2+1 \tag{4}$$

那么存在常数 $k\geqslant 0$，$O<\theta_0<1$，使如果

$$mesA(k)\leqslant\theta_0$$

成立，那么

$$mesA(2K+N)=O$$

其中　$A(k)=\left\{(x,t)\in Q,w>k\right\}$，$N=\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}$.

证：类似于[2]的方法，设

$$[w]=\begin{cases}w, & w\leqslant k,\\ k & w>k,\end{cases}$$

记　$t_k[w]=w-[w]\in \mathring{V}(Q)$.

在[3]中取　$v=t_K[w]$，并记

$$\sigma=\left\{\int_O^T\int_\Omega|\nabla_X w|^2dxdt+\sup_{t\in(O,T)}\int_\Omega w^2dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\theta_K=mesA(k).$$

代入(3)，并利用 Hölder 不等式得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2dx+\lambda\int_o^t\int_\Omega|\nabla_X v|^2dxdt\leqslant c\int_O^t\int_\Omega v\Big(d(x,t)w+f(x,t)\Big)dxdt$$

$$\leqslant c\Big\{\|v\|_{L^l(Q)}\|w\|_{L^l(Q)}\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}\theta_K{}^{1-\frac{2}{l}-\frac{1}{p}}$$

$$+\|v\|_{L^l(Q)}\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\theta_K{}^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{p}}\Big\}.$$

由引理1得

$$\sigma^2\leqslant c_1\sigma\theta_K{}^{1-\frac{2}{l}-\frac{1}{p}}\Big\{\|w\|_{L^l(Q)}\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}+\theta_K{}^{\frac{1}{l}}\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\Big\}$$

因　$|w|\leqslant|v|+k$

所以

$$\sigma^2\leqslant c_1\sigma\theta_K{}^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{p}}\Big\{(c_2\sigma+k\theta_K{}^{\frac{1}{l}})\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}\theta_K{}^{\frac{1}{l}}\Big\}.$$

限制 θ_0 适当小，使当 $\theta_K \leqslant \theta_0$ 时，有

$$c_1 c_2 \theta_K^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{p}} \| d(x,t) \|_{L^p(Q)} \leqslant \frac{1}{2},$$

那么

$$\sigma \leqslant 3c_3(K+N)\theta_K^{\eta}, \quad \eta = 1-\frac{1}{l}-\frac{1}{p}.$$

常数 c_3 依赖于引理 1 中的常数 c，λ 及 $\| d(x,t) \|_{L^p(Q)}$，不依赖于 k 和 w。以后我们都用 c 加下标表示类似性质的常数。

因为对任意 $h>k>0$ 有

$$(h-k)^l \theta_h \leqslant \int_O^T \int_\Omega |t_K[w]|^l dxdt \leqslant (c_4\sigma)^l \leqslant c_4^l (2c_3)^l (K+N)^l \theta_K^{\eta l}$$

取

$$K_\nu = K + (K+N) - \frac{K+N}{2^\nu}, \quad \nu = 0,1,2,\cdots$$

$$h = K_{\nu+1}, \qquad K = K_\nu$$

由(5)得

$$\theta_{K_{\nu+1}} \leqslant (2c_3c_4)^l 2^{(\nu+1)l} \theta_{k_\nu}^{\eta l} = (c_3c_4)^l 2^{(\nu+2)l} \theta_{k}^{\eta l}$$

因为 $p > \frac{n}{2}+1$，所以

$$\eta l = (1-\frac{1}{l}-\frac{1}{p})l = \left[\frac{1}{l} + 2(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2p})\right] l > 1,$$

限制 θ_0，使满足

$$(c_3c_4)^l 2^{2l} \theta_0^{\eta l - 1} \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon = 2^{\frac{l}{\eta l - 1}},$$

那么用数学归纳法可得

$$\theta_{K_\nu} \leqslant \varepsilon^\nu \theta_0.$$

所以 $\theta_{K_\nu} \to 0 \qquad (\nu \to \infty)$.

即

$$maxA(2K+N) = 0.$$

引理3 设 $w \in \mathring{V}(Q)$ 满足不等式(3)，$a^{\alpha\beta}(x,t,u)$，$d(x,t)$，$f(x,t)$ 满足条件(2)，(4)。那么存在与 w，$f(x,t)$ 无关的常数 $c>0$，使

$$\| w \|_{L^l(Q)} \leqslant c \| f(x,t) \|_{L^p(Q)}.$$

证：对任意正数 R，定义

$$[w]^R = \begin{cases} w, & |w| \leqslant R, \\ Rsignw, & |w| > R. \end{cases}$$

$$t_R[w] = w - [w]^R,$$

因为对 Q 的任意子集 E，有

$$\left(\iint_E |d(x,t)|^{\frac{n+2}{2}} dxdt \right)^{\frac{2}{n+2}} \leqslant \| d(x,t) \|_{L^p(Q)} (mesE)^{\frac{2}{n+2}-\frac{1}{p}},$$

$$mes\left\{(x,t)\Big|\,|d|>R\right\}\leqslant\frac{1}{R^{(n+2)/2}}\iint_{\{|d|>R\}}|d(x,t)|^{\frac{n+2}{2}}dxdt$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{R}\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}(mesQ)^{\frac{2}{n+2}-\frac{1}{p}}\right\}^{\frac{n+2}{2}}$$

$$\to 0\qquad(R\to\infty))$$

由 Lebesque 积分的绝对连续性，有

$$\left(\iint_Q|t_R[d]|^{\frac{n+2}{2}}dxdt\right)^{\frac{2}{n+2}}\leqslant\varepsilon(R)\to 0\qquad(R\to\infty).$$

所以

$$\iint_Q|t_R[d]w^2|dxdt\leqslant\|w\|^2_{L^l(Q)}\left(\iint_Q|t_R[d]|^{\frac{n+2}{2}}dxdt\right)^{\frac{2}{n+2}}$$

$$\leqslant\varepsilon(R)\|w\|^2_{L^l(Q)}\to 0\qquad(R\to\infty).$$

设 $\bar{w}=we^{-\mu t}\in\mathring{V}(Q)$，$\mu$ 是常数. 代入不等式(3)得

$$\int_0^t\int_\Omega\left\{ve^{\mu t}\bar{w}_t+(ve^{\mu t})_{,\alpha}\,a^{\alpha\beta}(x,t,u)\bar{w}_{,\beta}\right\}dxdt$$

$$\leqslant c\int_0^t\int_\Omega ve^{\mu t}\left\{\left(d(x,t)-\frac{\mu}{c}\right)\bar{w}+e^{-\mu t}f(x,t)\right)dxdt$$

因 $ve^{\mu t}\in\mathring{V}(Q)$，可取为试验函数，并仍记为 v，那么 $\bar{w}$ 满足形为

$$\int_0^t\int_\Omega\left(v\bar{w}+v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x,t,u)\bar{w}_{,}\right)dxdt\leqslant c\int_0^t\int_\Omega v\left\{\left(d(x,t)-\frac{\mu}{c}\right)\bar{w}+e^{-\mu t}f(x,t)\right\}dxdt$$

的不等式.

在上不等式中，取 $v=\bar{w}\in\mathring{V}(Q)$，那么

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\bar{w}^2dx+\lambda\int_0^t\int_\Omega|\nabla_X\bar{w}|^2dxdt\leqslant c\int_0^t\int_\Omega\left\{\left([d]^R-\frac{\mu}{c}\right)\bar{w}^2+|t^R[d]|\bar{w}^2\right\}dxdt$$

$$+c\int_0^t\int_\Omega e^{-\mu t}f(x,t)\bar{w}\,dxdt$$

由引理1得

$$\|\bar{w}\|^2_{L^l(Q)}\leqslant c_1\int_0^t\int_\Omega\left([d]^R-\frac{u}{c}\right)\bar{w}^2dxdt+c_1\left(\int_0^t\int_\Omega|t_R[d]|^{\frac{n+2}{2}}dxdt\right)^{\frac{2}{n+2}}\|w\|^2_{L^l(Q)}$$

$$+c_1\|e^{-\mu t}f(x,t)\|_{L^p(Q)}\|\bar{w}\|_{L^l(Q)}(mesQ)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{l}}.$$

我们先取 R 充分大，使右边第二项 $\|\bar{w}\|^2_{L^l(Q)}$ 的系数小于1，然后固定 R，再取 $\mu>RC$，使右边第一项为负. 那么便得到

$$\|\bar{w}\|^2_{L^l(Q)}\leqslant c_2\|e^{-\mu t}f(x,t)\|_{L^p(Q)}.$$

换回到 w，便得

$$\|w\|_{L^1(Q)}\leqslant c\|f(x,t)\|_{L^p(Q)},$$

其中常数 $c>0$ 依赖于 λ，T，$\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}$ 及(3)中的常数 c，而与 w，$f(x,t)$ 无关。

引理 4　设 $w\in\mathring{V}(Q)$，满足不等式(3)，$a^{\alpha\beta}(x,t,u)$，$d(x,t)$，$f(x,t)$ 满足条件(2)，(4)，那么存在与 w，$f(x,t)$ 无关的常数 $c>0$，使

$$\max_Q w\leqslant c\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}$$

证：设 $\theta_0>0$ 是引理 2 中的常数，取

$$K=\theta_0^{-\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2(Q)},$$

那么　　$mesA(K)\leqslant\frac{1}{K^2}\int_0^t\int_\Omega w^2dxdt=\theta_0,$

于是由引理 2，引理 3，在 Q 中几乎处处有

$$w(x,t)\leqslant 2K+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}=2\theta^{-\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2(Q)}+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}$$
$$\leqslant c\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}.$$

二、$\max\limits_Q u$ 的估计

定理1　设 $u\in W_2^{\frac{1}{2}}(Q)$ 满足方程(1)，$a^{\alpha\beta}(x,t,u)$ 满足条件(2)，$a^i(x,t,u,u_x)$满足

$$|u^ia^i(x,t,u,u_x)|\leqslant\Big(a(x,t)|\nabla_xu|+b(x,t)\Big)\Big|\nabla_x|u|^2\Big|$$
$$+\varepsilon|\nabla_xu|^2+d(x,t)|u|^2+f(x,t),\tag{6}$$

其中 $a(x,t),d(x,t)$ 有界

$$|a(x,t)|\leqslant a_0,\qquad |d(x,t)|\leqslant d_0,$$

$\varepsilon<\lambda$ 是常数，$d(x,t)$，$f(x,t)$ 是非负函数，且 $b(x,t)\in L^{2p}(Q)$，$f(x,t)\in L^p(Q)$。那么可估计 $\max\limits_Q|u|\leqslant K$，$K$ 依赖于 λ，ε，a_0，d_0，及 $\|d(x,t)\|_{L^{2p}(Q)}$，$\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}$，

K 具体由下面的证明中给出。

证。　设 $w=|u|^2$，在(1)中取

$$\varphi^i=2u^iv,\quad v\in\mathring{V}(Q)。$$

那么得

$$\int_0^t\int_\Omega\Big\{vw_t+v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x,t,u)w_{,\beta}+2a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i{}_{,\alpha}u^i{}_{,\beta}\Big\}dxdt$$
$$=-2\int_0^t\int_\Omega vu^ia^i(x,t,u,u_x)dxdt$$

以　　$ve^{-\mu t}\in\mathring{V}(Q)$ 代 v 作试验函数，并设

$$w=e^{\mu t}\tilde{w}$$

其中　$\mu > 2d_0$ 是常数，将它们代入上式得

$$\int_o^t\int_\Omega\left\{ v\tilde{w}_t + v,_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)\tilde{w},_\beta + ve^{-\mu t}a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i,_\alpha u^i,_\beta \right\}dxdt$$

$$-\int_o^t\int_\Omega ve^{-\mu t}\left\{2u^ia^i(x,t,u,u_X)+\mu w\right\}dxdt.$$

再设 $\tilde{w}=g(z)$，$g(z)$ 有二阶连续导数，满足 $g'(z)>0$，对 $g(z)$ 下面我们还要作进一步的要求。那么上式化为

$$\int_o^t\int_\Omega\left\{vg'(z)z_t+\Big(vg'(z)\Big),_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)z,_\beta - vg''(z)a^{\alpha\beta}(x,t,u)z,_\alpha z,_\beta\right.$$

$$\left.2ve^{-\mu t}a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i,_\beta\right\}dxdt = -\int_o^t\int_\Omega ve^{-\mu t}\Big(2u^ia^i(x,t,u,u_x)+\mu w\Big)dxdt.$$

因 $v\in\hat{V}(Q)$，所以 $vg'(z)$ 代 v 作试验函数，并仍记为 v，我们得到

$$\int_o^t\int_\Omega\left\{vz_t+v,_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)z,_\beta\right\}dxdt$$

$$+\int_o^t\int_\Omega\left\{-\frac{g''(z)}{g'(z)}va^{\alpha\beta}(x,t,u)z,_\alpha z,_\beta+\frac{2v}{g'(z)}e^{-\mu t}a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i,_\alpha u^i,_\beta\right\}dxdt$$

$$=-\int_o^t\int_\Omega\frac{ve^{-\mu t}}{g'(z)}\left\{2u^ia^i(x,t,u,u_x)+\mu w\right\}dxdt,$$

应用条件(6)，(7)上式右边不超过

$$\int_o^t\int_\Omega\frac{ve^{-\mu t}}{g'(z)}\left\{2\Big(a_0|\nabla_xu|+b(x,t)\Big)|\nabla_xw|+2\varepsilon|\nabla_xu|^2+(2d_0-\mu)w+2f(x,t)\right\}dxdt,$$

注意到 $\mu>2d_0$，上式不超过

$$\int_o^t\int_\Omega 2v\Big(a_0|\nabla_xu|+b(x,t)\Big)|\nabla_x|\,dxdt+2\int_o^t\int_\Omega\frac{ve^{-\mu t}}{g'(z)}\Big(\varepsilon|\nabla_xu|^2+f(x,t)\Big)dxdt.$$

根据条件(2)，及应用 Young 不等式 $ab\leqslant\varepsilon a^2+\frac{b^2}{\varepsilon}$，并要求 $g''(z)<0$，那么得

$$\int_o^t\int_\Omega\left\{vz_t+v,_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)z,_\beta\right\}dxdt+\int_o^t\int_\Omega\left\{-\frac{\lambda g''(z)}{g'(z)}v|\nabla_xz|^2\right.$$

$$\left.+\frac{2\lambda ve^{-\mu t}}{g'(z)}|\nabla_xu|^2\right\}dxdt\leqslant\int_o^t\int_\Omega\frac{ve^{-\mu t}}{g'(z)}(\varepsilon_1+2\varepsilon)|\nabla_xu|^2\,dxdt$$

$$+\int_o^t\int_\Omega\Big(\frac{a_0{}^2e^{\mu t}}{\varepsilon_1}+1\Big)g'(z)v|\nabla_xz|^2dxdt+\int_o^t\int_\Omega\frac{v}{g'(z)}\Big(b^2(x,t)+2e^{-\mu t}f(x,t)\Big)dxdt.$$

因为 $\varepsilon<\lambda$，可取 ε_1，使 $2\lambda-2\varepsilon-\varepsilon_1\geqslant 0$，然后固定 ε_1。记 $c_0^{-1}=\frac{a_0e^{\mu T}}{\varepsilon^1}+1$，进一步要求 $g(z)$ 满足

$$-\frac{\lambda g''(z)}{g'(z)}-\frac{1}{c_0}g'(z)\geqslant 0,\qquad g'(o)=0$$

例如取　$g(z)=\lambda c_0 ln(1+z)$

便满足上面要求。

最后，我们得到

$$\int_o^t\int_\Omega\Big(vz_t+v,_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)z,_\beta\Big)dxdt\leqslant\int_o^t\int_\Omega\frac{v}{g'(z)}\Big(b^2(x,t)+2f(x,t)e^{-\mu t}\Big)dxdt.$$

或写为

$$\int_0^t\int_\Omega\left(v z_t + v_{,\alpha} a^{\alpha\beta}(x,t,u) z_{,\beta}\right)dxdt \leqslant \frac{1}{\lambda c_0}\int_0^t\int_\Omega v\left(b^2(x,t)+2f(x,t)e^{-\mu t}\right)(z+1)dxdt. \quad (8)$$

如果 $\max\limits_S|u|\leqslant M$，那么 $\max\limits_S w\leqslant M^2$，$\max\limits_S z\leqslant e^{\frac{M^2}{\lambda c_0}}-1$，记 $\widetilde{M}=e^{\frac{M^2}{\lambda c_0}}-1$．

如果记 $z^+=max(z-\widetilde{M},O)$，那么 $z^+\in\mathring{V}(Q)$，代入(8)得到 z^+ 满足

$$\int_0^t\int_\Omega\left(v z_t^+ + v_{,\alpha} a^{\alpha\beta}(x,t,u) z^+_{,\beta}\right)dxdt \leqslant \frac{1}{\lambda c_0}\int_0^t\int_\Omega v\left(b^2(x,t) + 2f(x,t)\right)(z^+ + \widetilde{M}+1)dxdt$$

具有不等式(3)的形状．因此根据引理4，我们得到

$$\max_Q z^+\leqslant c(\widetilde{M}+1)\|b^2(x,t)+2f(x,t)\|_{L^p(Q)}$$
$$\leqslant c_1(\widetilde{M}+1)\left(\|b(x,t)\|^2_{L^{2p}(Q)}+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\right).$$

记上式右边的常数为 $\stackrel{\approx}{M}$，那么

$$\max_Q \bar{w}\leqslant\lambda c_0 ln\left(1+\stackrel{\approx}{M}\right).$$

于是最后得到

$$\max_Q|u|\leqslant\left(e^{\mu t}\lambda c_0 ln(1+\stackrel{\approx}{M})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理证完．

定理2　设 $u\in W_2^{\frac{1}{2}}(Q)$ 满足方程(1)，$a^{\alpha\beta}(x,t,u)$ 满足条件(2)，$a^i(x,t,u,u_x)$ 满足

$$|a^i(x,t,u,u_x)|\leqslant b(x,t)|\nabla_x u|+d(x,t)|u|+f(x,t) \quad (6)$$

$b(x,t)$，$d(x,t)$，$f(x,t)$ 是非负函数，且

$$d(x,t)\in L^{2p}(Q),\ d(x,t),\ f(x,t)\in L^p(Q),\ p>\frac{n}{2}+1.$$

如果存在 $M>0$，使 $max(|u|-M,O)\in\mathring{V}(Q)$，

那么

$$\max_Q|u|^2\leqslant M^2\left\{1+c\left(\|d(x,t)\|^2_{L^{2p}(Q)}+\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\right\}\right.$$

其中常数 $c>0$，仅依赖于 λ，n，p，$\|d(x,t)\|_{L^{2p}(Q)}$，$\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}$，$\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}$，与 u 无关．

证：设 $w=|u|^2$，在(1)中取 $\varphi^i=2n^i v$，$v\in\mathring{V}(Q)$，那么有

$$\int_0^t\int_\Omega\left(v w_t + v_{,\alpha} a^{\alpha\beta}(x,t,u) w_{,\beta}\right)dxdt = -2\int_0^t\int_\Omega v\left(a^{\alpha\beta}(x,t,u)u^i_{,\alpha}u^i_{,\beta}\right.$$
$$\left.+u^i a^i(x,t,u,u_x)\right)dxdt\leqslant -2\lambda\int_0^t v|\nabla_x u|^2 dxdt$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega v|u|\left(b(x,t)|\nabla_x u|+d(x,t)|u|+f(x,t)\right)dxdt.$$

应用 Young 不等式、上式右边不超过

$$-\int_0^t\int_\Omega v|\nabla_x u|^2(2\lambda-\varepsilon)dxdt$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \upsilon\left\{\left(\frac{b^2(x,t)}{\varepsilon}+d(x,t)+f(x,t)\right)|u|^2+f(x,t)\right\}dxdt.$$

因此，取 $\varepsilon=2\lambda$，便得到

$$\int_0^t\int_\Omega\left(\upsilon w_t+\upsilon,_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)w,_\beta\right)dxdt$$

$$\leqslant\int_0^t\int_\Omega \upsilon\left\{\left(\frac{1}{2\lambda}b^2(x,t)+d(x,t)+f(x,t)\right)+f(x,t)\right\}dxdt.$$

设 $w^+=max(w-M^2,O)$，由 $max(|u|-M,O)\in\mathring{V}(Q)$，知 $w^+\in\mathring{V}(Q)$，且由上式知 w^+ 满足

$$\int_0^t\int_\Omega \upsilon\left(\upsilon w_t^+ +\upsilon,_\alpha a^{\alpha\beta}(x,t,u)w^+,_\beta\right)dxdt\leqslant\int_0^t\int_\Omega \upsilon\tilde{d}(x,t)w^+ +\tilde{f}(x,t)\Big)dxdt.$$

其中

$$\tilde{d}(x,t)=\frac{1}{2\lambda}b^2(x,t)+d(x,t)+f(x,t)\in L^p(Q),$$

$$\tilde{f}(x,t)=M^2\left(\frac{1}{2\lambda}b^2(x,t)+d(x,t)+f(x,t)\right)+f(x,t)\in L^p(Q),$$

且
$$\|\tilde{f}(x,t)\|_{L^p(Q)}\leqslant M^2\left(\frac{1}{2\lambda}\|b(x,t\|^2_{L^{2p}(Q)}+\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}\right.$$

$$\left.+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\right)+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}.$$

由引理4得

$$\max_Q w^+\leqslant c\|\tilde{f}(x,t)\|_{L^p(Q)}$$

$$\leqslant c_1M^2\left(\|b(x,t)\|^2_{L^{2p}(Q)}+\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\right)$$

最后得

$$\max_Q|u|^2\leqslant M^2+cM^2\left(\|b(x,t)\|^2_{L^{2p}(Q)}+\|d(x,t)\|_{L^p(Q)}+\|f(x,t)\|_{L^p(Q)}\right).$$

其中常数 $c>0$，依赖于 λ，n，p 及 $b(x,t)$，$d(x,t)$的范数。

定理证完

参考文献

〔1〕张克农，一类二阶抛物型方程组的广义极值原理，厦门大学学报(自然科学版)，19，4(1980)，114—117.

〔2〕梁汲廷、吴在德，梁学信，一致抛物型方程广义解的弱最大值原理与唯一性定理，数学研究与评论、3，3(1983)，67—71

〔3〕Ладыжеская. О. А. И Уральцева. Н. Н.，Краевая Задача Для Линейных И квазилинейных уравнений и систем праболилескою тица. Ш，Известия Ак. наук ссср，серия матем. 27(1983)，161—240.