

劈 m 次 因 子 法

蔡 火 萤

(数 学 系)

一、引言及主要结果

五次以及五次以上的高次代数方程,在一般情况下就没有根号解〔1〕.因此,研究高次代数方程的数值解法就显得十分必要.利用劈因子法求高次方程的根,前人已有研究.例如 Newton 就采用劈一次因子的方法求方程的根,但这种方法每一次只能劈下一个因子,获得方程的一个实根,并且在实运算的情况下无法获得方程的复根〔2〕.后来 Bajrstown 又采用劈二次因子的方法求高次代数方程的根〔2〕,每次可以劈下一个二次因子,获得方程的两个根,包括一对共轭复根.以后林士谔又作了一些改进,近年来,劈因子法还有许多讨论〔5〕、〔6〕,但每次仍然只能劈下一个二次因子,而且只有一些情况下收敛,而在另一情况下可能发散〔1〕.本文实现了一次可以劈下一个 n 次多项式方程的 m 次因子 ($1 \leq m \leq \frac{n}{2}$),并且迭代过程具有二阶敛速

二、方 法 的 建 立

假设给出一个实系数多项式方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$a_0 = 1$$

这个实系数多项式有一个实系数 m 次因子

$$x^m + \bar{p}^{(1)} x^{m-1} + \cdots + \bar{p}^{(m)}$$

$$1 \leq m \leq n/2$$

这个 m 次因子的近似式是

$$x^m + p^{(1)} x^{m-1} + \cdots + p^{(m)}$$

它们之间的误差关系是

$$\Delta p^{(i)} = \bar{p}^{(i)} - p^{(i)}$$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

在一般情况下,这个近似 m 次因子不能整除多项式 $f(x)$, 假设带余除式是

$$f(x) = Q(x) [x^m + p^{(1)} x^{m-1} + \cdots + p^{(m)}]$$

$$+ R_1 x^{m-1} + \cdots + R_m \quad (2)$$

其中

$$R_1, R_2, \cdots, R_m$$

自然是

$$p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(m)}$$

的函数, 并且当

$$p^{(i)} = \bar{p}^{(i)} \\ i = 1, 2, \cdots, m,$$

时, 有

$$R_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

如果引入记号

$$p = [p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(m)}]^T \\ R(p) = [R_1(p), \cdots, R_m(p)]^T$$

则

$$\bar{p} = [\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}, \cdots, \bar{p}^{(m)}]^T$$

是非线性方程组

$$R(p) = 0$$

的解

今将非线性函数 $R(p)$ 在点 p 处作 Taylor 展开

$$o = R(\bar{p}) \\ = R(p + \Delta p) \\ = R(p) + DR(p)\Delta p + \cdots$$

略去高阶微量得

$$DR(p)\Delta p + R(p) = 0$$

或者

$$\frac{\partial R_i}{\partial p^{(1)}} \Delta p^{(1)} + \cdots + \frac{\partial R_i}{\partial p^{(m)}} \Delta p^{(m)} = -R_i \\ i = 1, 2, \cdots, m$$

如果

$$R_1, R_2, \cdots, R_m$$

和

$$\frac{\partial R_i}{\partial p^{(j)}}; \quad i, j = 1, 2, \cdots, m$$

已经求出, 则

$$\Delta p^{(1)}, \Delta p^{(2)}, \cdots, \Delta p^{(m)}$$

便可以求出来, 今在带余除式(2)中, 命

$$Q(x) = b_0 x^{n-m} + b_1 x^{n-m-1} + \cdots + b_{n-m}$$

然后比较同次幂的系数得

$$(2) \quad b_i = a_i - b_{i-1}p^{(1)} - b_{i-2}p^{(2)} - \dots - b_{i-m}p^{(m)} \\ i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

这里形式地多计算出

$$b_{n-m+1}, b_{n-m+2}, \dots, b_n$$

且令

$$b_{-1} = b_{-2} = \dots = b_{-m} = 0$$

于是得

$$R_i = b_{n-m+i} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{n-m+i-j} p^{(j)} \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

在带余除式(2)中, 依次对

$$p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}$$

求偏导数, 可得

$$-\frac{\partial Q(x)}{\partial p^{(i)}} [x^m + p^{(1)}x^{m-1} + \dots + p^{(m)}] + Q(x) \cdot x^{m-1} \\ + \frac{\partial R_1}{\partial p^{(i)}} x^{m-1} + \dots + \frac{\partial R_m}{\partial p^{(i)}} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, m$$

另一方面设

$$Q(x) = H(x)[x^m + p^{(1)}x^{m-1} + \dots + p^{(m)}] \\ + s_1x^{m-1} + \dots + s_m \quad (3)$$

今定义

$$A_l[i] = s_i, \text{ 令 } s_{m+l} = 0, l \geq 1 \\ A_{j+1}[i] = A_j[i+1] - A_j[1]p^{(i)} \\ j = 1, 2, \dots, m-1 \\ i = 1, 2, \dots, m$$

则有关系式

$$x^{k-1}Q(x) = [x^{k-1}H(x) + \sum_{j=1}^{K-1} A_j[1]x^{K-j-1}] \\ \cdot [x^m + p^{(1)}x^{m-1} + \dots + p^{(m)}] + \sum_{j=1}^m A_K[j]x^{m-j} \\ K = 1, 2, \dots, m.$$

由带余除法的唯一性得

$$\frac{\partial R_i}{\partial p^{(i)}} = -A_{m-j+1}[i] \\ i, j = 1, 2, \dots, m.$$

又在带余除式(3)中令
用利比较系数法可得

$$H(x) = c_0x^{n-2m} + c_1x^{n-2m-1} + \dots + c_{n-2m} \\ c_i = b_i - c_{i-1}p^{(1)} - c_{i-2}p^{(2)} - \dots - c_{i-m}p^{(m)}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m-n$$

这里

$$c_{n-2m+1}, c_{n-2m+2}, \dots, c_{n-m}.$$

是形式地多求出来的, 并且令

$$c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-m} = 0$$

于是得到

$$s_i = c_{n-2m+i} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{n-2m+i-j} p^{(j)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

综上所述可得如下计算步骤:

(1) 对于所给实系数多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$a_0 = 1$$

适当取出它的 m 次因子

$$x^m + \bar{p}^{(1)} x^{m-1} + \dots + \bar{p}^{(m)}$$

的系数的初始近似值

$$p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \dots, p_0^{(m)}$$

以及允许精度 $\varepsilon > 0$

(2) 假设已经给出 m 次因子的系数的第 k 次近似值

$$p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, \dots, p_k^{(m)} \quad (k \geq 0)$$

则计算

$$b_i = a_i - b_{i-1} p_K^{(1)} - b_{i-2} p_K^{(2)} - \dots - b_{i-m} p_K^{(m)}$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

其中

$$b_{-1} = b_{-2} = \dots = b_{-m} = 0$$

计算

$$R_i = b_{n-m+i} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{n-m+i-j} p_K^{(j)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

计算

$$c_i = b_i - c_{i-1} p_K^{(1)} - c_{i-2} p_K^{(2)} - \dots - c_{i-m} p_K^{(m)}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-m$$

其中

$$c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-m} = 0$$

计算

$$s_i = c_{n-2m+i} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{n-2m+i-j} p_K^{(j)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

并规定

$$s_{m+l} = 0, \quad l \geq 1.$$

计算

$$A_1[i] = s_i$$

$$A_{i+1}[i] = A_i[i+1] - A_i[1]p_K^{(i)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

$$j = 1, 2, \dots, m-1.$$

计算

$$\frac{\partial R_i}{\partial p_K^{(i)}} = -A_{m-j+1}[i]$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m.$$

计算

$$\Delta = \left| \frac{\partial R_i}{\partial p_K^{(i)}} \right|_{m \times m}$$

$$\Delta l = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial p_K^{(1)}} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial p_K^{(L-1)}} - R_1 \frac{\partial R_1}{\partial p_K^{(L+1)}} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial p_K^{(m)}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial p_K^{(1)}} & \dots & \frac{\partial R_m}{\partial p_K^{(L-1)}} - R_m \frac{\partial R_m}{\partial p_K^{(L+1)}} & \dots & \frac{\partial R_m}{\partial p_K^{(m)}} \end{bmatrix}$$

$$L = 1, 2, \dots, m.$$

$$\Delta p_K^{(L)} = \Delta L / \Delta$$

计算

$$p_{K+1}^{(i)} = p_K^{(i)} + \Delta p_K^{(i)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

(3) 检查精度

若

$$|\Delta p_K^{(i)}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

则以

$$p_{k+1}^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

作为满足要求的近似值, 否则用 $k+1$ 代替 k 并且转去执行(2)

三、收敛性分析

对于所给非线性组

$$X = \Phi(X)$$

(1)

其中

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$\Phi(X) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]^T$$

求解非线性组(1)的简单迭代程序是

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \Phi(X_k) \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

其中 x_0 是初值.

定理1 设 $X^* \in D$ 是非线性组(1)的解, 并且存在一个球

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

使得对于一切点

$$x \in G$$

皆有

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| &\leq q \|x - x^*\| \\ 0 < q < 1 \end{aligned}$$

则从任意点 $x_0 \in G$ 出发, 经过简单迭代程序(2), 所产生的点列 $\{x_k\} \subset G$, 且收敛于 x^*

证明 从略[3]

引理1 对于任何一个 $n \times n$ 阶矩阵 A , 以及任意正数 $\varepsilon > 0$, 总可以在 R^n 中找到一种范数 $\|\cdot\|$, 使得在这个范数的意义下成立关系式

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

其中 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径

证明 从略[4][3]

引理2 如果向量值函数

$$\Phi: D \subset R^n \rightarrow R^n$$

于 $x^* \in D$ 处可微, 则对任 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得对一切 $x \in G$, 其中

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

成立关系式

$$\|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| \leq (\|D\Phi(x^*)\| + \varepsilon) \|x - x^*\|$$

证明 从略[3]

定理2 设 x^* 是非线性方程组(1)的解, 并且向量值函数

$$\Phi: D \subset R^n \rightarrow R^n$$

在 $x^* \in D$ 处可微, 同时

$$\rho(D\Phi(x^*)) < 1$$

则存在一个球

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

使得从任 $x_0 \in G$ 出发, 经过简单迭代程序(2), 所产生的迭代点列 $\{x_k\} \subset G$, 且收敛于 x^* .

证明 因 $\Phi(x)$ 在 x^* 处可微, 由引理2可知, 对任 $\varepsilon > 0$, 总存在一个球

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

使得对一切 $x \in G$, 皆有

$$\|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| \leq (\|D\Phi(x^*)\| + \varepsilon) \|x - x^*\|$$

由引理1知, 对矩阵 $D\Phi(x^*)$ 和正数 $\varepsilon > 0$, 总在 R^n 中存在一个范数 $\|\cdot\|$, 使得在这种范数意义下, 成立关系式

$$\|D\Phi(x^*)\| \leq \rho(D\Phi(x^*)) + \varepsilon$$

取这两种范数相同而可得到

$$\|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| \leq (\rho(D\Phi(x^*)) + 2\varepsilon) \|x - x^*\|$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 且知

$$\rho(D\Phi(x^*)) < 1$$

因此总可以选择适当的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$0 < q = \rho(D\Phi(x^*)) + 2\varepsilon < 1$$

这样便得到关系式

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| &\leq q \|x - x^*\| \\ 0 < q < 1 \end{aligned}$$

由定理1知定理2的结论成立

定理3 设 $x^* \in D$ 是非线性方程组 (1) 的解, 并且向量值函数

$$\Phi: D \subset R^n \rightarrow R^n$$

在 x^* 处二次连续可微, 同时

$$D\Phi(x^*) = 0$$

则存在一球

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

使得从任 $x_0 \in G$ 出发, 经过简单迭代方程 (2) 所产生的迭代点列 $\{x_k\} \subset G$, 且收敛于 x^* , 同时具有二阶敛速。

证明 关于收敛性的问题显然成立, 下面证明它具有二阶敛速, 由简单迭代程序 (2) 知,

$$x_{K+1} = \Phi(x_K)$$

设

$$\Delta x_K = x_K - x^*$$

则

$$x_K = x^* + \Delta x_K$$

于是有

$$\begin{aligned} x_{K+1} &= \Phi(x_K) \\ &= \Phi(x^* + \Delta x_K) \\ &= \Phi(x^*) + D\Phi(x^*)\Delta x_K + O(\|\Delta x_K\|^2) \\ &= x^* + O(\|\Delta x_K\|^2) \end{aligned}$$

从而推知

$$\frac{\|\Delta x_{k+1}\|}{\|\Delta x_k\|^2} \leq C, \quad (2)$$

即 x_k 收敛于 x^* 具有二阶敛速.

对于所给非线性方程组

$$f(x) = 0 \quad (3)$$

其中

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$$

求解非线性方程组(3)的 Newton 迭代程序是

$$x_{k+1} = x_k - [Df(x_k)]^{-1}f(x_k) \quad (4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 x_0 是初值

引理3 若 $x^* \in D$ 是非线性方程组(3)的解, 并且向量值函数

$$f: D \subset R^n \rightarrow R^n$$

在 x^* 处可微, 且矩阵值函数

$$A: D \subset R^n \rightarrow R^{n \times n}$$

在 x^* 处连续, 并且矩阵 $A(x^*)$ 非奇异, 则存在一个球.

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

使得向量值函数

$$\Phi(x) = x - A(x)^{-1}f(x)$$

在球 G 中适定, 在 x^* 处可微, 并且

$$D\Phi(x^*) = I - A(x^*)^{-1}Df(x^*)$$

其中 I 是单位矩阵

证明 从略[3]

定理4 若 $x^* \in D$ 是非线性方程组(3)的解, 并且向量值函数

$$f: D \subset R^n \rightarrow R^n$$

在 D 上三次连续可微, 同时矩阵 $Df(x^*)$ 非奇异, 则存在一个球

$$G = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta\} \subset D$$

使得从任 $x_0 \in G$ 出发, 经过求解非线性方程组(3)的 Newton 迭代程序(4)所产生的迭代点列 $\{x_k\} \subset G$, 且收敛于 x^* , 同时具有二阶敛速

证明 设

$$A(x) = Df(x)$$

则 $A(x)$ 在 x^* 处连续, 且 $A(x^*)$ 非奇异, 由引理(3)知, 存在一个球

$$G_1 = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta_1\} \subset D$$

使得向量值函数

$$\Phi(x) = x - Df(x)^{-1}f(x)$$

在球 G_1 中适定, 在 x^* 处二次连续可微, 并且

$$D\Phi(x^*) = 0$$

由定理(3)知, 定理 4 的结论成立.

定理5 设 m 次因子

$$x^m + \bar{p}^{(1)} x^{m-1} + \dots + \bar{p}^{(m)}$$

的 m 个根

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$$

都是多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

的单根, 则劈因子法的迭代过程收敛, 并且具有二阶敛速

证明 设

$$p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}$$

分别是

$$\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}, \dots, \bar{p}^{(m)}$$

的近似值, 则在一般情况下, 近似 m 次因子

$$x^m + p^{(1)} x^{m-1} + \dots + p^{(m)}$$

不能整除多项式 $f(x)$, 由带余除法知有

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)[x^m + p^{(1)} x^{m-1} + \dots + p^{(m)}] \\ &\quad + R_1 x^{m-1} + \dots + R_m \end{aligned} \quad (5)$$

于是劈因子法的迭代过程等价于求解非线性方程组

$$R(p) = 0 \quad (6)$$

的 Newton 迭代过程, 因此要证明劈因子法的迭代过程收敛, 并且具有二阶敛速, 只须证明用 Newton 法求解非线性方程组(6)的迭代过程收敛, 并且具有二阶敛速, 为此我们只须证明矩阵

$$DR(\bar{p})$$

非奇异便可, 今将带余除式(5)的两边依次对

$$p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}$$

求偏导数得

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial R_1}{\partial p^{(i)}} x^{m-1} + \frac{\partial R_2}{\partial p^{(i)}} x^{m-2} + \dots + \frac{\partial R_m}{\partial p^{(i)}} \\ &+ \frac{\partial Q(x)}{\partial p^{(i)}} [x^m + p^{(1)} x^{m-1} + \dots + p^{(m)}] + Q(x) x^{m-i} = 0 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

然后令

$$p^{(i)} = \bar{p}^{(i)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

再依次用

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$$

代替 x , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_1}{\partial p^{(i)}} x_K^{*m-1} + \frac{\partial R_2}{\partial p^{(i)}} x_K^{*m-2} + \dots + \frac{\partial R_m}{\partial p^{(i)}} \\ &= -Q(x_K^*) x_K^{*m-i} \\ & k=1, 2, \dots, m \\ & i=1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} DR(\bar{p}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial p^{(1)}} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial p^{(m)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial p^{(1)}} & \dots & \frac{\partial R_m}{\partial p^{(m)}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^{*m-1} & \dots & x_1^* & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ x_m^{*m-1} & \dots & x_m^* & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -Q(x_1^*) \\ \vdots \\ -Q(x_m^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{*m-1} & \dots & x_1^* & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ x_m^{*m-1} & \dots & x_m^* & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即 $DR(\bar{p})$ 非奇异, 定理证毕.

参 考 文 献

- [1] 清华大学、北京大学, 计算方法(上册), 科学出版社, (1974).
- [2] 曹志浩、张玉德、李瑞遐, 矩阵计算与方程求根, 人民教育出版社, (1979).
- [3] 王德人, 非线性方程组解法与最优化方法, 人民教育出版社, (1982).
- [4] 北京大学数学力学系, 高等数学, 人民教育出版社, (1978).
- [5] 井中, 求多项式根的新劈因子法, 计算数学, 1: 1 (1979), 31—34.
- [6] 张景中、杨路, 求多项式根的 2^n 劈因子法, 计算数学, 4: 4 (1982), 417—426.