论均熵流气体动力学方程组的真空状态

林龙威

（数学系）

(1) 在文[1]中，作者改进了 *Dafermos* 的只适用于单个守恒律的折线逼近法[2]，提出一种适用于气体动力学方程组的折线逼近法．本文将这种方法用来研究气体动力学方程组的整体连续解，得到新的结果．这里的逼近解的结构简单明了，不但在数值上逼近所求的解，而且在几何上逼近所求的解，是力学研究中所希望得到的逼近解．

考虑均熵流气体动力学方程组

$$\begin{cases} v_t + u_x = 0, \qquad u_t + p(v)_x = 0, \qquad (-\infty, \infty\times)[0, T) & \text{(E)} \\ ((u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), \qquad (-\infty, \infty) & \text{(I)} \end{cases}$$

其中 $p(v) \in C^2(0, \infty)$，$p'(v) < 0$，$p''(v) > 0$，

$$\int_1^\infty \sqrt{-p'(v)}\, dv < \infty. \tag{C}$$

加上条件 (C) 是由于力学上需要，它也给这个问题带来实质性的困难．譬如在这个条件下，方程(E)的 *Riemann* 问题的解可能出现真空，因而人们倾向于相信除非初值远离真空状态[3]，否则，有可能在有限时间内出现真空．当初始时刻气流只含稀疏波时，亦即初值满足条件

$$r_0(x_1) \leqslant r_0(x_2), \qquad s_0(x_1) \leqslant s_0(x_2), \qquad (x_1 < x_2) \tag{M}$$

时，其中r与s是*Riemann*不变量

$$r \equiv u + \int_1^r \sqrt{-p'(v)}\, dv, \qquad s \equiv u - \int_1^r \sqrt{-p'(v)}\, dv.$$

迄今人们只知道[4, 5, 6, 7]当初值的全变差不太大时，具体说来，当

$$\{(r, s \mid r_0(-\infty) \leqslant r \leqslant r_0(\infty),\ s_0(-\infty) \leqslant s \leqslant s_0(\infty)\} \in \Omega \tag{V}$$

其中 $\Omega \equiv \left\{ (r, s) \mid r - s < 2\int_1^\infty \sqrt{-p'(v)}\, dv \right\}$，初值问题$(E)$、$(I)$存在整体连续解．条件$(V)$保证气流严格离开真空状态 $\rho(x, t) \geqslant \rho_0 > 0$，$\rho = 1/v$．对不满足条件$(V)$的初值，特别是当初值 $r_0(x)$，$s_0(x)$ 接近真空，全变差充分大时，人们倾向于相信气流在有限的时间内会出现真空．

本文证明在条件(M)下，只要在初始的瞬间内，气流不出现真空，那么气流恒不出现真空（但可能渐近于真空）．在这里不但对初值的全变差没有任何要求，甚至不要求初值上方有界．

这个结果显示出折线逼近法的优点．人们从这个证明和这里的逼近解的结构中，可以直

接了当地看出为什么在条件(M)下不会出现真空。根据这个直观，现在人们倾向于相信即使对一般初值（指不要求只发出稀疏波）。只要在初始瞬间不出现真空，那么只后也不会出现真空。

（2）$p(v)$的折线逼近的定义如下：对给定正整数n，令$v_0^{(n)}=1$，且$v_k^{(n)}$（k是整数）由递推公式 $G\left(v_k^{(n)}, v_{k+1}^{(n)}\right) \equiv \left[p\left(v_k^{(n)}\right)-p\left(v_{k+1}^{(n)}\right)\right]\left(v_{k+1}^{(n)}-v_k^{(n)}\right)=\frac{1}{n^2}$，$\left(v_{k+1}^{(n)}>v_k^{(n)}\right)$，确定。顶点是$\left(v_k^{(n)}, p\left(v_k^{(n)}\right)\right)$的折线是$p(v)$的折线逼近，这些函数记为$p_n(v)$，$n=1,2,\cdots$。

考虑初值问题

$$\begin{cases} v_t-u_x=0, \qquad u_t+p_n(v)=0, \qquad (-\infty,\infty)\times[0,\infty) & (E)_n \\ (u(x,0),\ v(x,0))=(u_0(x),v_0(x)), \qquad (-\infty,\infty). & (I) \end{cases}$$

Riemann不变量定义为

$$r^{(n)}(u,v)\equiv u+\Phi_n(v),$$
$$s^{(n)}(u,v)\equiv u-\Phi_n(v),$$

其中$\Phi_n(v)\equiv\int_1^v\sqrt{-p_n'(s)}\,ds$。显然$\Phi_n\left(v_k^{(n)}\right)=\frac{k}{n}$， $k=0,\pm1,\cdots$。

下列状态称为标准状态：

$$\left(u,v\right)=\left(\frac{i}{n}, v_j^{(n)}\right),$$

即

$$\left(u,\Phi_n\right)=\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right),$$

即

$$\left(r^{(n)}, s^{(n)}\right)=\left(\frac{2k}{n}, \frac{l}{n}\right),$$

其中$k=\frac{1}{2}(i+j)$， $l=\frac{1}{2}(i-j)$，$i+j=$偶数。

考虑$(E)_n$的Riemann问题，其初值的左、右状态是标准状态$\left(u_-,v_-\right)=\left(\frac{i}{n}, v_j^{(n)}\right)$，$\left(u_+,v_+\right)=\left(\frac{i+M+N}{n}, v_{i+M-N}^{(n)}\right)$，$M\geqslant0$，$N\geqslant0$。容易看出，这个Riemann问题的解由$M+N+1$个标准状态所组成，这些标准状态被$M+N$条以原点为心的直线所分开，这些间断线称为标准特征间断。记为S．C．D．

注 两条异类的S．C．D．相交以后，仍发出两条异类S.C.D.、S.C.D.左侧的u值比右侧的u值大$1/n$；上侧的$\Phi_n(v)$值比下侧的$\Phi_n(v)$值大$1/n$。

设初值$\left(r_0^{(n)}(x),\ s_0^{(n)}(x)\right)$由有限个标准状态组成，$r_0^{(n)}(x)$，$s_0^{(n)}(x)$是单调不增函数。容易看出，方程组$(E)_n$之带有标准初值$\left(r_0^{(n)}(x), s_0^{(n)}(x)\right)$的解$\left(r^{(n)}(x,t),\ s^{(n)}(x,t)\right)$是由有限片标准状态所组成。每片都是一个方块（四边形），但在初始直线上的方块可能变为三边形或五边形。对任何两个有公共边的方块，左侧的u值大于右侧的$1/n$，上侧的$\Phi_n(v)$值大于下侧的$1/n$。

$P_{i+1}^{j}\left(x_{i+1}^{j}, t_{i+1}^{j}\right)$是点的记号，上标$j$表示该点左方和右方的$\Phi_n$值都是$\frac{j}{n}$，下标$i$表示上方

和下方的 u 值都是 $\frac{i+1}{n}$，$i+j=$偶数.记 $b_{i+1}^{j} \equiv x_{i+1}^{j}-x_{i}^{j}, b_{i}^{j} \equiv x_{i}^{j+1}-x_{i-1}^{j}, \tau_{i+1}^{j}=t_{i+1}^{j}-t_{i}^{j+1}$，$\tau_{i}^{j} \equiv t_{i}^{j+1}-t_{i-1}^{j}$，$i+j=$偶数，$b_k \equiv \min_{m} b_{m}^{k}$. 可以证明 $b_k \geqslant b_{k-1}$. 设 $2a$ 是初始直线上相邻的间断点的距离，于是有 $b_k \geqslant a$.

定理 若 $u_0(x)$，$v_0(x)$ 有界，$0<v_* \leqslant v_0(x) \leqslant v_0$，$Lip$ 一连续，且满足

$$r_o(x_1) \leqslant r_o(x_2), \qquad s_o(x_1) \leqslant s_o(x_2), \qquad x_1<x_2, \tag{M}$$

$r_o(x) \equiv u_o(x)+\Phi(v_o(x))$，$s_o(x) \equiv u_o(x)-\Phi(v_o(x))$，那么初值问题$(E)$、$(I)$存在 Lip—连续解，且

$$V_o \leqslant \sup_{0 \leqslant t<T} v(x,t) \leqslant V_o+LT.$$

证 由于$u_o(x)+\Phi_n(v_o(x))$与$u_o(x)-\Phi_n(v_o(x))$未必满足条件(M). 我们设$u^{(n)}(x) \equiv u_o(x)+(sign\ x)T_0^xVF_n(v_o(x))$，其中 $F_n \equiv \Phi_n-\Phi$，$T_a^bVf(x)$表示 $f(x)$ 在以 a 与 b 为端点的区间上的全变差. 设$r^{(n)}(x) \equiv u^{(n)}(x)+\Phi_n(v_o(x))$，$s^{(n)}(x) \equiv u^{(n)}(x)-\Phi_n(v_o(x))$，容易证明 $r^{(n)}(x)$与 $s^{(n)}(x)$ 满足条件(M). 我们用由标准状态组成的阶梯函数逼近初值. 用上述方法构造逼近解. 设L是$u_o(x)$的 Lip—常数，易知$L \geqslant \frac{1}{na}$，或$a \geqslant \frac{1}{nL}>0$. 设 l_p 是上侧为$\left(\cdot, v_p^{(n)}\right)$，下侧为$\left(\cdot, v_{p-1}^{(n)}\right)$的间断线段组成的集合. T_p 是 l_p 的 t 坐标的最小值，可以证明

$$\begin{aligned} T_p &\geqslant \sum_{j=M}^{P-1} \tau_j=\sum_{j=M}^{p-1} \frac{b_j}{\lambda_j} \geqslant a \sum_{j=M}^{p-1} \frac{1}{\lambda_j} \\ &=an \sum_{j=M}^{p-1}\left(v_{j+1}^{(n)}-v_j^{(n)}\right) \\ &=na\left(v_p^{(n)}-v_M^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{L}\left(v_p^{(n)}-v_M^{(n)}\right), \end{aligned}$$

其中 $M \equiv \max_x \Phi_n\left(v_o^{(n)}(x)\right)$，即$v_M^{(n)} \equiv \max_x v_o^{(n)}(x)$，$v_o^{(n)}(x)$ 是初值 $v_o(x)$ 的逼近函数.

证明的其余部分没有原则性困难，从略.

这个定理的主要条件是(M)，其他条件可以削弱为 $u_o(x)$与$v_o(x)$分段 Lip—连续，且初始瞬间不出现真空，(即 $r_o(x+0)-s_o(x-0)<2\Phi(\infty)$). 不必要求初值上方有界. 这时初值问题$(E)$、$(I)$的解是局部 Lip—连续.

本文作者是在访问美国布朗(Brown)大学和马里兰(Maryland)大学期间完成. Dafermos 教授和刘太平教授对本文的写作十分关心. 特向两位教授致谢.

参考文献

〔1〕 Lin Long—Wei、Polygonal approximations of the intial value problem for the equation of isentropic gas dgnamics, (1982) Changchun symposium on differen tial geometry and differentia equations.

〔2〕 C. M. Dafermos, Polygonal approximations of systems of the initial value problem for a conservation law, J. Math. Anal. and Appl., 38 (1972), 33—41.

〔3〕 T. P. Liu and J. A. Smoller, On the isentropic gas dynamics equtions, Adv. Appl. Math, 1 (1980), 345—359.

〔4〕 Lin Long-Wei, On the global existence of the continuous solutions of the reducible quasi-linear hyperdolic systems, Acta Scien. Nat. Jilin Univ. 4 (1963), 83—96

〔5〕 J. L. Johnson, Global continuous solutions of hyperbolic systems of quasi-linear equations, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 639—641.

〔6〕 M. Yamaguti and T. Nisida, On the some global soiution for quasi-linaer hypebolic equations, Funkcial Evac., 11(1968), 51—57.

〔7〕 D. Hoff, A constructive theory for shocks free, isentropic flow, J. Diff., 33 (1980), 1—31.