计算机数控系统的稳定性

陈　玉　宝

（物　理　系）

摘　　要

本文从控制论的角度，研究了计算机数控系统的动态联接方式、大系统中各子系统间的动态关联和关联函数描述。给出了计算机数控系统稳定性的充要条件。

一、引　　言

我们讨论了数控技术发展趋势的系统结构框图[1]，分析了早期数控系统中直接数控方式的缺点，并给出了近年来随着微处理机蓬勃发展而出现的分级式直接数控系统结构图(图1)。

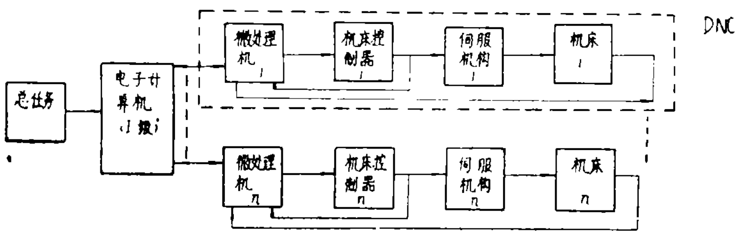
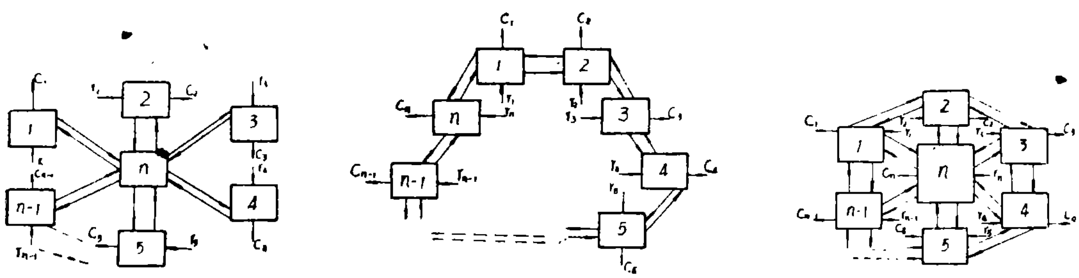


图 1　分级式的DNC控制系统

这样的分级式DNC系统具有上、下二级计算机控制系统。它按图1中虚框中所示的DNC系统间有无关联及排列联接，可分为单向型、循环型和循环互联型三种，其流程示意图见图2。



a—单向型　　b—循环型　　c—循环互联型

图 2

在图2中，以循环互联型系统最为复杂。前二种仅分别是它的特特情况。它的各子系统参数相互影响和制约，当某一子系统出现偏差，随即波及其它子系统乃至整个系统，由此而来的稳定性和最优化问题显得尤为突出。然而当这样系统一旦能园满地解决上述问题后，不仅其效率是单向型和循环型所望尘莫及的，而且具有很重大的工程意义。鉴此，本文旨在从控制论的角度来探讨循环互联型系统的稳定性问题。

二、循环互联型系统的描述

1、循环互联型系统的一般描述

从理论上讲，这样的系统可以由n个子系统组成。为了便予论述，我们仅取$n=4$为例。但它的结果和方法仍可推广到$n>4$的情形。在此我们设：每个子系统仅包括一个加工对象（如机床等），并且每个加工对象是单输入单输出型的。图3给出这样系统的结构框图。

如果我们不把微处理机考虑作为一个对象单元的话，则系统的方程可描述为：

$$\left.\begin{aligned}
x_1(k+2)+a_{11}x_1(k+1)+a_{21}x_1(k)&=b_1u_1(k)+c_{12}x_2(k)+c_{13}x_3(k)+c_{14}x_4(k)\\
x_2(k+2)+a_{12}x_2(k+1)+a_{22}x_2(k)&=b_2u_2(k)+c_{21}x_1(k)+c_{23}x_3(k)+c_{24}x_4(k)\\
x_3(k+2)+a_{13}x_3(k+1)+a_{23}x_3(k)&=b_3u_3(k)+c_{31}x_1(k)+c_{32}x_2(k)+c_{34}x_4(k)\\
x_4(k+2)+a_{14}x_4(k+1)+a_{24}x_4(k)&=b_4u_3(k)+c_{41}x_1(k)+c_{42}x_2(k)+c_{43}x_3(k)
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

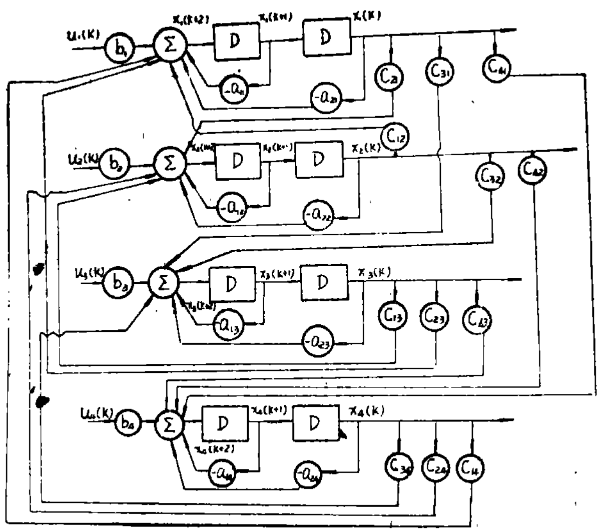


图 3 循环互联型系统的结构图

诚然，为了与标准系统状态方程统一起来[5]，我们把方程（1）用矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} x_1(k+2) \\ x_2(k+2) \\ x_3(k+2) \\ x_4(k+2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{pmatrix} \tag{2}$$

从方程式（1）和图2中，我们不难发现：在同样的假设条件下，修改方程中 $c_{ij}x_j(k)$ 的关联项，则（2）式为单向型流程的系统。在方程（1）中加入相邻项（与该项前后相联的子系统）关联项而舍去非相邻的关联项，则（2）式可整理为循环型的流程方程。所以从某种意义上讲，单向型和循环型仅分别是循环互联型的一种特例，也就是之所以我们着重于研究循环互联型系统的原由。

2、循环互联型系统的稳态值求解

有了上述的方程（2），现在我们来考虑系统的稳态输出值。在此不妨设拟讨论的系统（2）必须在稳定区中工作。则我们可以从任意给定的输入值和系统参量来确定系统的稳态输出值。若不考虑方程（2）中的各子系统间耦合关联项，有形如下述的方程：

$$x_i(k+2) + a_{1i}(k+1) + a_{2i}x_i(k) = b_iu_i(k) \tag{3}$$

令：

$$x_i(k+2) = y_2(k+1);\quad x_i(k+1) = y_2(k),\quad x_i(k) = y_1(k),\quad b_i = 1$$

使得：

$$x_i(k+1) = y_1(k+1);\quad y_1(k+1) = y_2(k);$$

则对于单对象双环节（图3）无关联的系统方程可描述为：

$$y_2(k+1) = x_i(k+2) = -a_{2i}x(k) - a_{1i}x_i(k+1) + u_i(k) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2i} & -a_{1i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ui(k) \tag{5}$$

如果 a_{2i}，a_{1i} 及 u_i 已知的情况下，可用重复方程（5）过程的方法求出 n 个子系统的稳态输出值。

显然，为了更简捷地确立方程（2）的稳态值，z 变换及其性质将是一个强有力的工具。在此，我们扼要地简述一下 z 变换几个基本性质：

对于离散信号我们可描述为：

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\triangle t)\delta(t-k\triangle t) \tag{6}$$

对（6）式取拉氏变换，由于现在 $x(k\Delta t)$ 中不包含变量 t，故可视为常数，则有：

$$x^*(s)=L[x^*(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(k\Delta t)L[\delta(t-k\Delta t)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(k\Delta t)e^{-ks\Delta t} \qquad (7)$$

令：　$e^{S\Delta t}=e^{ST}=z$，则原来是 s 的函数变成 z 函数，记：

$$x(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k\Delta t)z^{-k} \qquad (8)$$

（8）式即为序列 $x(k\Delta t)$，（$k=0, 1, 2, \cdots$）的 z 变换。

它的初始值定律为

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

它的终值定律为

$$\lim_{k\to\infty}f(k)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)F(z)$$

现在我们设方程（6）的初值为零，且阶跃输入，并对其取 z 变换有：

$$Z^2x(z)+a_{1i}Zx(z)+a_{2i}x(z)=\frac{zu_i}{z-1} \qquad (9)$$

$$x(z)=zu_i/(z-1)(z^2+a_{1i}z+a_{2i}) \qquad (10)$$

利用 z 变换的终值定律得

$$F_x(z)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{u_iz}{(z-1)(z^2+a_{1i}z+a_{2i})}=\frac{u_i}{1+a_{1i}+a_2'} \qquad (11)$$

有了方程（11），我们可以求出在已知参数变量和输入值情况下的系统稳态输出值。

3、循环互联型系统的 z 变换方程

如果我们考虑方程（2）的循环互联型系统时，利用上述方法，对方程（2）求其 z 变换则有：

$$\left(Z^2I+Z\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&a_{12}&0&0\\0&0&a_{13}&0\\0&0&0&a_{14}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{21}&-c_{12}&-c_{13}&-c_{14}\\-c_{21}&a_{22}&-c_{23}&-c_{24}\\-c_{31}&-c_{32}&a_{23}&-c_{34}\\-c_{41}&-c_{42}&-c_{43}&a'_{24}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1(z)\\x_2(z)\\x_3(z)\\x_4(z)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_1&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&b_3&0\\0&0&0&b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(z)\\u_2(z)\\u_3(z)\\u_4(z)\end{pmatrix} \qquad (12)$$

经整理后可得

$$\begin{pmatrix}z^2+za_{11}+a_{21}&-c_{12}&-c_{13}&-c_{14}\\-c_{21}&z^2+za_{12}+a_{22}&-c_{23}&-c_{24}\\-c_{31}&-c_{32}&z^2+za_{13}+a_{23}&-c_{34}\\-c_{41}&-c_{42}&-c_{43}&z^2+za_{14}+a_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(z)\\x_2(z)\\x_3(z)\\x_4(z)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_1&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&b_3&0\\0&0&0&b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(z)\\u_2(z)\\u_3(z)\\u_4(z)\end{pmatrix} \qquad (13)$$

三、循环互联型系统的稳定性

我们现在要讨论循环互联型系统的稳定性问题可按二个步骤进行。一是将其分解为若干个子系统及其满足关联条件下的稳定性，然后再来分析整个系统的全局稳定性[3]。

在我们所讨论的系统中，其信息基本上是属于离散数字量，则其稳定性不同连续量自动调节系统那样复杂。从原则上讲，稳定性只要求各个子系统及其相互关联项的有界输入产生一个有界输出，即：

$$\left.\begin{aligned} & x_i(k+2)+a_{ij}x_j(k+2)+a_{i+1,j}x_j(k)\leqslant M<\infty \\ & b_iu_j(k)+\sum_{i\neq i}^{n}c_{ij}x_j(k)\leqslant N<\infty \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

从实际工程上考虑，计算机数控系统是按脉冲当量工作的，若我们在此不考虑其伺服机构的输出值，则（14）式应变为：

$$\left.\begin{aligned} & x_i(k+2)+a_{ij}x_j(k+2)+a_{i+1,j}x_j(k)\leqslant M\sum_{i\neq j}\delta_{ij} \\ & b_iu_i(k)+\sum_{i\neq j}^{n}c_{ij}x_j(k)\leqslant N\sum_{i\neq j}\delta_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

则称系统（2）为满足因果性的稳定系统。

当我们进一步考虑它的充要条件时，可以考虑一种比较简单实用的输入输出稳定性方法。从方程（2）中，若我们不考虑其关联矩阵，则可等价于方程（9）。对其取 z 变换并令初值为零，则可得方程（11）。对应的齐次方程有：

$$z^2+a_{1i}z+a_{2i}=0 \tag{16}$$

若方程（16）的根全部落在单位园里，则称无关联时系统是稳定的，反之，则称之为不稳定的。

现在我们考虑有关联时的系统，此时，不仅无关联系统的根要落在单位园里，且关联方程的根也应在单位园里。若满足这个条件的系统，则称全局稳定的系统，反之，为不稳定的。

关联方程的根在已知系统的 a_{ij}、c_{ij}、b_i、$u_i(z)$参量情况下，可以通过（13）式求出。所求出的相应根 $x_1(z)$，$x_2(z)\cdots\cdots x_n(z)$若全部落在单位园里，则我们可以说循环互联型系统是稳定的。

综上所述，我们有其全局稳定的充要条件：（16）和（13）式的根全部都是单位园里的任意值，则循环互联型系统是全局稳定的，反之，则称系统为全局不稳定或不稳的。

参考文献

〔1〕陈玉宝，数控技术的现状及发展趋势，福建电子技术，3—4（1980）
〔2〕王照林等，现代控制理论基础，国防工业出版社(1981)
〔3〕涂序彦，关于大系统理论的几个问题，自动化学报，5，3(1979)
〔4〕N. R. Sandell, Survey of decentralized Control methods for large Scale System, IEEE Tran. A. C Vol（AC—23），2(1978)
〔5〕陈玉宝，线性控制系统的Walsh级数综合，华侨大学学报，1(1982)