推导洛仑兹变换的一种方法

陈燊年

（物理系）

摘　　要

本文把低速领域的速度变换表成一般速度所满足的函数方程，证明在高速领域里，这个方程的解就是爱因斯坦速度公式，并可从后者导出著名的洛仑兹变换式。

一、引　　言

自一九〇五年相对论问世以来，关于洛仑兹变换的推导已有多种不同的方法[1,7]，其中多数是以一定的坐标系分析为基础或采用坐标系的某些公理出发来推导的，因而必然是先得到洛仑兹变换式再得到爱因斯坦速度公式。本文提出相反的途径，它不依赖对一定的坐标系的分析为基础，但仍然遵从爱因斯坦关于光速不变和满足相对性原理这两条基本假定，从低速的速度变换式出发，先导出爱因斯坦速度公式，再导出洛仑兹变换式。这种推导不仅表现为一种新的方法，而且在思路上颇有一定特色。

为进行下面推导，把所需的物理条件概括为如下四条假定：

（一）普遍的速度变换式应用到低速领域时，古典的速度合成公式成立。

（二）不同惯性系测定同一质点的速度值之间有一一对应的关系。

（三）光速在任一惯性系中，任一方向的值都等于 c。

（四）速度变换式满足相对性原理，即其形式与惯性系的选择无关。

二、x 轴分量的速度变换公式

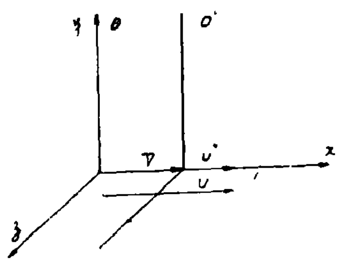

图　1

设有二个惯性系 O 与 O'，其中 O' 沿着 O 的 x 轴正向以速度 V 运动，U' 和 U 分别是某质点相对于 O' 和 O 的 x 轴速度。则当 U' 和 U 是低速时，U' 至 U 的变

换关系为

$$U=V+U' \quad (1)$$

假设（一）给出，当 U' 和 U 是高速时，上式可一般地表为

$$U=A(V,\ U')V+B(V,\ U')U' \quad (2)$$

式中待求函数 A 和 B 不能包含时间和空间的变量，否则当低速时(2)式不能化回(1)式。若

$$V+U'\neq 0$$

总可以令

$$D(V,\ U')=\frac{A(V,\ U')V+B(V,\ U')U'}{V+U'} \quad (3)$$

使（2）式简化为

$$U=D(V,\ U')(V+U') \quad (4)$$

因为光速是最大速度且只考虑单方向的沿 x 轴正方向的运动，则知待求函数 D 是定义在区间 $[0,\ c]$ 内。

假定（二）给出函数 D 在闭区间 $[0, c]$ 内是连续且单调的函数。因为对一定的惯性系，即取 V 为某恒值时，任何一个 U' 的值只能对应一个确定的 U 值，当 U' 连续变化时，U 亦随之连续变化，即 U 是 U' 的连续单调函数。同理，当 U' 取某恒值时，U 也是 V 的连续单调函数。

假定（三）给出函数 D 在区间 $[0,\ c]$ 一端上的形式。即把当 $V=c$ 时，有 $U=c$ 以及当 $U'=c$ 时，有 $U=c$，分别代入（4）式得

$$D(c,\ U')=\frac{1}{1+\frac{U'}{c}} \quad (5)$$

$$D(V,\ c)=\frac{1}{1+\frac{V}{c}} \quad (6)$$

由此可知，在区间 $[0,\ c]$ 内，为不失一般性，可设函数 D 形式为

$$D(V,\ U')=\frac{E_1(V,\ U')}{1+\frac{U'}{c}F_1(V, U')} \quad (7)$$

$$D(V,\ U')=\frac{E_2(V,\ U')}{1+\frac{V}{c}F_2(V, U')} \quad (8)$$

其中

$$E_1=(c,\ U')=1, \qquad F_1(c,\ U')=1;$$
$$E_2=(V,\ c)=1, \qquad F_2(V,\ c')=1.$$

若

$$G_1(V,\ U')\neq -\frac{c}{U'} \quad (9)$$

$$G_2(V,\ U')\neq -\frac{c}{V} \quad (10)$$

总可以令

$$E_1(V, U') = \frac{1+\frac{U'}{c}F_1(V, U')}{1+\frac{U'}{c}G_1(V, U')}$$

$$E_2(V, U') = \frac{1+\frac{V}{c}F_2(V, U')}{1+\frac{V}{c}G_2)V, U')}$$

使（7）和（8）式简化为

$$D(V, U') = \frac{1}{1+\frac{U'}{c}G_1(V, U')} \tag{11}$$

$$D(V, U') = \frac{1}{1+\frac{V}{c}G_2(V, U')} \tag{12}$$

比较上二式得

$$\frac{G_1(V, U')}{G_2(V, U')} = \frac{V}{U'}$$

因而有

$$G_1(V, U') = kV \tag{13}$$

$$G_2(V, U') = kU' \tag{14}$$

把（13）和（11）式代入（4）式得

$$U = \frac{V+U'}{1+\frac{VU'}{c}k}$$

再根据假设（三），当 $V=c$ 和 $U'=c$ 时，仍有 $U=c$，故得

$$k = \frac{1}{c} \tag{15}$$

因而，满足以上所述三个假设的速度变换的函数方程的解是

$$D(V, U') = \frac{1}{1+\frac{VU'}{c^2}}$$

因而有

$$U = \frac{V+U'}{1+\frac{VU'}{c^2}} \tag{16}$$

以上推导过程曾要求排除 $V+U'\neq 0$ 和 $G_1\neq -\frac{c}{U'}$，$G_2\neq -\frac{c}{V}$。后者把（15）式分别代入（13）式和（14）式而自动排除。前者由（16）式知，当 $V+U'\to 0$ 时，有 $U\to 0$，$D(V, U')$ 亦有极限存在，即补上 $V=-U'$ 这一数值后，$D(V, U')$ 在这点亦是连续。

三、y 轴分量的速度变换公式

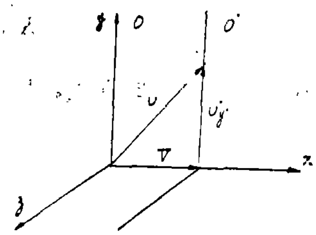

图 2

如果U'方向不与动系O'的x'轴正向平行，则可先求U'在y'轴方向情形。

设$U'_{y'}$和U分别表示质点对动系O'沿其y'轴方向的速度和质点对静系O的速度。则当$U'_{y'}$和V是低速时，$U'_{y'}$至U的变换关系为

$$U=\sqrt{V^2+U'^2_{y'}}\,. \tag{17}$$

假设（一）给出，当$U'_{y'}$和V高速时，上式可一般地表为

$$U=\sqrt{I(V,\ U'_{y'})V^2+J(V,\ U'_{y'})U'^2_{y'}}$$

式中当$V\to 0$和$U'_{y'}\to 0$时，$I(V,\ U'_{y'})$和$J(V,\ U'_{y'})$都趋于1。如令

$$I(V,\ U'_{y'})V^2+J(V,\ U'_{y'})U'^2_{y'}=V^2+K(V,\ U'_{y'})U'^2_{y'}$$

使上式简化为

$$U=\sqrt{V^2+K(V,\ U'_{y'})U'^2_{y'}} \tag{18}$$

式中当$V=0$时

$$K(0,\ U'_{y'})=1. \tag{19}$$

假定（二）给出，待求函数K在闭区间$[0,\ c]$内是连续且单调。

假定（三）给出函数K在区间$[0,\ c]$一端上的形式。即把当$U'_{y'}=c$时，有$U=c$以及当$V=c$时，有$U=c$，分别代入（18）式得

$$K(V,\ c)=1-\frac{V^2}{c^2} \tag{20}$$

$$K(c,\ U'_{y'})=0 \tag{21}$$

式中函数K不具有量纲。由此可知，在区间$[0,\ c]$内，为了能满足（19）式，函数K只能是下列形式的级数

$$\begin{aligned}K(V,U'_{y'})&=1-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i,\,j=0}^{\infty}a_{ij}\frac{V^iU'^j_{y'}}{c^{i+j}}\right)^n\\&=1-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{V^i}{c^i}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\frac{U'^j_{y'}}{c^j}\right)^n\end{aligned} \tag{22}$$

上式要满足（20）式，即当$U'_{y'}=c$时，有

$$1-\frac{V^2}{c^2}=1-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{V^i}{c^i}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\right)^n$$

比较两边得

$$\begin{gathered}n=1\\i=2\\\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}=1\end{gathered} \tag{23}$$

代回（22）式得

$$K(V,\ U'_{y'}) = 1 - \frac{V^2}{c^2}\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}\frac{U'^{j}_{y'}}{c^j} \tag{24}$$

上式又要满足（21）式，即当 $V=c$ 时，有

$$0 = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}\frac{U'^{j}_{y'}}{c^j}$$

或

$$(1-a_{20}) - a_{21}\frac{U'_{y'}}{c} - a_{22}\frac{U'^{2}_{y'}}{c^2} - a_{23}\frac{U'^{3}_{y'}}{c^3} \cdots\cdots = 0 \tag{25}$$

对任意 $U'_{y'}$ 的值，上式都恒等于零，因而有

$$a_{20}=1, \qquad a_{21}=a_{22}=\cdots\cdots=0 \tag{26}$$

代回（24）式，解出函数 $K(V,\ U'_{y'})$ 为

$$K(V,\ U'_{y'}) = 1 - \frac{V^2}{c^2} \tag{27}$$

再代回（18）式得

$$U = \sqrt{V^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)U'^{2}_{y'}} \tag{28}$$

对静系 O 讲，质点运动速度 U 分解为两个方向，即

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$$

与（28）式比较得

$$U_x = V$$

$$U_y = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,U'_{y'} \tag{29}$$

因 $V=0$ 时，$U_y = U'_{y'}$，所以根号前应取正号。上式就是当 $U'_x=0$ 时，U'_y 与 U_y 的变换关系式。

当 $U'_{x'}\neq 0$ 时，可引进辅助惯性系 O''，其坐标轴方向仍与 O 系和 O' 系平行，并使 O'' 系以速度 $U'_{x'}$ 沿 O' 系的 x' 轴方向运动。再设质点对 O'' 系只有沿 y'' 轴运动，用 $U''_{y''}$ 表示这个速度。则 $U''_{y''}$ 至 U_y 的变换关系服从（29）式

$$U_y = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,U''_{y''} \tag{30}$$

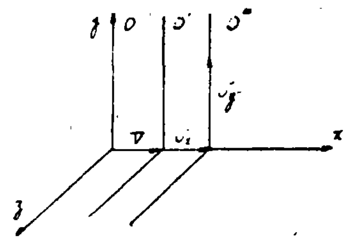

图 3

式中 u 表示 O'' 系相对 O 系的 x 轴方向的运动速度。依（16）式有

$$u = \frac{V+U'_x}{1+\frac{VU'_x}{c^2}}. \tag{31}$$

至于 $U''_{y''}$ 也可以变换成质点对 O' 系的 y 轴速度，依（29）式有

$$U'_{y'} = \sqrt{1-\frac{U'^{2}_{x'}}{c^2}}\,U''_{y''} \tag{32}$$

将上二式代回（30）式，消去 u 和 $U''_{y''}$ 后得

$$U_y = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,U'_{y'}}{1+\frac{VU'_{x'}}{c^2}} \tag{33}$$

同理可得

$$U_z = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,U'_{z'}}{1+\frac{VU'_{x'}}{c^2}} \tag{34}$$

上二式便是当 $U'_{x'}\neq 0$ 时，由动系 O' 至静系 O 的 y 轴和 z 轴方向的速度变换关系。

四、洛仑兹变换

由（16）式得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Vdt' + dx'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}$$

式中我们使用 $U_x = \frac{dx}{dt}$，$U'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$，并不是预先假定 $t\neq t'$，而是不失一般性地让此结果自然得出。

为满足上式微分方程，唯有

$$\begin{aligned} dx &= M(Vdt' + dx') \\ dt &= M\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right) \end{aligned} \tag{35}$$

由此解得

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - Vdt}{M\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)} \\ dt' &= \frac{dt - \frac{V}{c^2}dx}{M\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \tag{36}$$

现在把 O' 看是静系，O 看是动系，因而有 O 相对于 O' 以速度 $-V$ 运动。按相对性原理，在（16）式中用 $-V$ 替换 V，用 U 替换 U'，用 U' 替换 U，便得 O 至 O' 的速度变换关系

$$U'_{x'} = \frac{U_x - V}{1 - \frac{VU_x}{c^2}}$$

或

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx}$$

同样有

$$dx' = M(dx - Vdt)$$

$$dt' = M\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)$$

与（36）式比较得

$$M = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

代入（35）式后积分，并利用初始条件：当 $t=0$ 时，$t'=0$，$x=0$，$x'=0$。于是得

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (37)$$

同样地由（33）式得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,dy'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}$$

故亦有

$$dy = N\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,dy' \qquad (38)$$

$$dt = N\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right) \qquad (39)$$

（39）式与（35）后式此较，可知

$$N = M = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

代入（38）式得 $dy = dy'$

如仍以坐标原点重合的时间为零时作为初始条件，则由上式积分得

$$y = y'$$

同理 $$z = z' \qquad (40)$$

（37）式和（40）式便是著名的洛仑兹变换公式。

参 考 文 献

〔1〕A. W. INGLETON, Natucl, 171, (1953), 618.
〔2〕W. H. MOCREA, Proc Roy. Irish. Acad, 45, (1938), 23.
〔3〕L. A. PARS, Phil Mag, 42, (1921), 249。
〔4〕K. D. STIEGLER, Compt. Rend, 234, (1952), 1250.
〔5〕G. TEMPLE, Quart. Jour of Math, 9, (1938), 283.
〔6〕A. N. WHITEHEAD, The priaciple of Relativity, Cambridge, (1922).
〔7〕G. J. WHITROW, Quart. Jout. of Math, 4, (1933), 161.
〔18〕E. A. MILNE, Kinematic Relativity, Oxford, (1948).
〔19〕P. FRANCK & H. ROTHR, Ann. der phys, 34, (1911), 825.