若干组合恒等式

王志雄

（数学系）

本文将利用格点路径的计数方法及生成函数法，推导一些组合恒等式。这些恒等式推广了 Breusch[1]，Rohatgi[2] 的结果。

文中的字母，如无另加声明，均表示自然数。

平面上以整数为坐标的点称为格点，以格点（a，b）为始点，以（c，d）为终点（$a\leqslant c$，$b\leqslant d$）的格点路径〔以后简称为（a，b）$\longrightarrow$（c，d）路径〕指的是格点列：

$$(a,\ b)=(x_0,\ y_0),\ (x^1,\ y^1),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)=(c,\ d),$$

满足条件：

$$\text{(i)}\quad \forall i\,(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\ x_{i-1}\leqslant x_i,\ y_{i-1}\leqslant y_i,$$

$$\text{(ii)}\quad \forall i\,(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\ x_i+y_i=x_{i-1}+y_{-1}+1$$

不难证明

引理 1 （a，b）$\longrightarrow$（c，d）路径数与（$a+s$，$b+t$）$\longrightarrow$（$c+s$，$d+t$）路径数相等，都等于$\binom{(c-a)+(d-b)}{c-a}$。

引理 2 （Takacs[3]）若 $m>kn$，$k\geqslant 1$，则（0，0）$\longrightarrow$（m，n）之在直线 $x=ky$ 下〔即除（0，0）外与 $x=ky$ 不交〕的路径数为

$$\frac{m-kn}{m+n}\binom{m+n}{n}.$$

定理 1 当 $m>n+1$ 时

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2i+1}{i}\binom{m+n-2i-2}{n-i}\cdot\frac{1}{m-i-1}=\binom{m+n}{n}\cdot\frac{1}{m-n-1}.$$

证 考虑（0，0）$\longrightarrow$（m，n）路径。这种路径必与 $x=y+1$ 相交。最后一个交点是（$i+1$，i）（$i=0$，1，……，n）的路径数，由引理 1 和引理 2，等于

$$\binom{2i+1}{i}\cdot\frac{(m-i-1)-(n-i)}{(m-i-1)+(n-i)}\cdot\binom{m-i-1+n-i}{n-i},$$

另一方面，由引理 1，（0，0）$\longrightarrow$（m，n）路径数是$\binom{m+n}{n}$。故得证。

定理 2 当 $m>n$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}\binom{m+n-2i-1}{n-1}=\binom{m+n}{n}.$$

证 $(0,0)\longrightarrow(m,n)$ 之路径必与 $x=y+(m-n-1)$ 相交，最后一个交点为 $(m-n-1+j,\ j)$ $(j=0,1,\cdots\cdots,n)$ 的路径数，由引理1和引理2，等于

$$f_j=\binom{m-n-1+2j}{j}\cdot\frac{(n+1-j)-(n-j)}{(n+1-j)+(n-j)}\binom{n+1-j+n-j}{n-j}.$$

令 $n-j=i$，则

$$f_j=\binom{m+n-1-2i}{n-i}\cdot\frac{1}{2i+1}\binom{2i+1}{i}$$
$$=\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}\binom{m+n-1-2i}{n-i}.$$

故得证。

在定理2中，取 $m=n+1$，得

推论（Breusch[1]）

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}=\binom{2n+1}{n}.$$

考虑更一般的直线 $L: x=k(y-b)$，$(0,0)\longrightarrow(m,n)$ $[m>k(n-b)]$ 与 L 相交且最后一个交点是 $[k(i-b),\ i]$ $(i=b,\cdots\cdots,n)$ 之路径数 g_i，由引理1和引理2，等于

$$g_i=\binom{k(i-b)+i}{i}\cdot\frac{m-k(i-b)-k(n-i)}{m-k(i-b)+n-i}\binom{m-k(i-b)+n-i}{n-i}$$
$$=\frac{m-kn+kb}{m+kb+n-(k+1)i}\binom{(k+1)i-kb}{i}\binom{m+kb+n-(k+1)i}{n-i}.$$

取 $b=0$，则得

定理3 当 $m>kn$，

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{m-kn}{m+n-(k+1)i}\binom{(k+1)i}{i}\binom{m+n-(k+1)i}{n-i}=\binom{m+n}{n}.$$

取 $m=kn+v$，则得

定理4

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{v}{(k+1)(n-i)+v}\binom{(k+1)i}{i}\binom{(k+1)(n-i)+v}{n-i}=\binom{(k+1)n+v}{n}.$$

以 $n-i$ 代 i，以 k 代 $k+1$ 得

推论（Rohatgi[2]）

$$v\sum_{i=0}^{n}\binom{k(n-i)}{n-i}\binom{ki+v}{i}\cdot\frac{1}{ki+v}=\binom{kn+v}{n}.$$

一般的

$$f(m,n)=\sum_{i=b}^{n}\frac{m-kn+kb}{m+kb+n-(k+1)i}\binom{(k+1)i-kb}{i}\binom{m+kb+n-(k+1)i}{n-i}$$

表示（0，0）⟶（m，n）与 L 相交的路径数，故与 L 不相交的路径数是

$$F(m,\ n)=\binom{m+n}{n}-f(m,\ n).$$

显然有如下递推关系

$$F(m,\ n)=\begin{cases}F(m-1,\ n)+F(m,\ n-1), & m>k(n-b)+1\geqslant 1;\\ F(m,\ n-1), & m=k(n-b)+1;\\ \binom{m+n}{n}, & n<b.\end{cases}$$

令

$$G(x,\ y)=\sum_{n=b}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)+1}^{\infty}F(m,\ n)x^{m}y^{n},$$

则

$$\begin{aligned}(x+y)G(x,\ y)&=\sum_{n=b}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)+2}^{\infty}F(m-1,\ n)x^{m}y^{n}\\&\quad+\sum_{n=b+1}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)-k+1}^{\infty}F(m,\ n-1)x^{m}y^{n}\\&=\sum_{n=b}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)+2}^{\infty}[F(m-1,\ n)+F(m,\ n-1)]x^{m}y^{n}\\&\quad-\sum_{m=2}^{\infty}F(m,\ b-1)\,x^{m}y^{b}+\sum_{n=b+1}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)-k+1}^{k(n-b)+1}F(m,n-1)x^{m}y^{n},\end{aligned}$$

因当 $m>k(n-b)+1$ 时，$F(m,\ n)=F(m-1,\ n)+F(m,\ n-1)$，故

$$\begin{aligned}(x+y)G(x,\ y)&=\sum_{n=b}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)+2}^{\infty}F(m,\ n)x^{m}y^{n}-\sum_{m=2}^{\infty}F(m,\ b-1)x^{m}y^{b}\\&\quad+\sum_{m=b+1}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)-k+1}^{k(n-b)}F(m,\ n-1)x^{m}y^{n}\\&\quad+\sum_{n=b+1}^{\infty}F[k(n-b)+1,\ n-1]\,x^{k(n-b)+1}y^{n},\end{aligned}$$

因 $F[k(n-b)+1,\ n-1]=F[k(n-b)+1,\ n]$，当 $n=b$ 时，

$$F[k(n-b)+1,\ n-1]\,x^{k(n-b)+1}y^{n}=F(1,\ b-1)xy^{b},\quad \text{且 } F(m,b-1)=\binom{m+b-1}{m},$$

故得

$$\begin{aligned}(x+y)G(x,\ y)&=G(x,\ y)-\sum_{m=1}^{\infty}\binom{m+b-1}{m}x^{m}y^{b}\\&\quad+\sum_{n=k+1}^{\infty}\ \sum_{m=k(n-b)-k+1}^{k(n-b)}F(m,\ n-1)x^{m}y^{n}.\end{aligned}$$

因 $\sum_{m=1}^{\infty}\binom{m+b-1}{m}x^m=\frac{1}{(1-x)^b}-1$，故

$$G(x,\ y)=\frac{1}{1-x-y}\left\{\left(\frac{1}{(1-x)^b}-1\right)y^b-\sum_{n=b+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}F[i+1+k(n-b-1),\ n-1]x^{i+1+k(n-b-1)}y^n\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{(1-x)^{j+1}}\left\{\left(\frac{1}{(1-x)^b}-1\right)y^b-\sum_{n=b+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}F[i+1+k(n-b-1),\ n-1]x^{i+1+k(n-b-1)}y^n\right\},$$

比较 y^n 的系数得

$$\sum_{m=k(n-b)+1}^{\infty}F(m,\ n)x^m=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}-\frac{1}{(1-x)^{n-b+1}}-\sum_{t=b+1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}F[i+1+k(t-b-1),t-1]x^{i+1+k(t-b-1)}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-t+1}},$$

把右边展开为 x 之幂级数并比较两边 x^m 的系数得

$$F(m,\ n)=\binom{m+n}{m}-\binom{m+n-b}{m}-\sum_{t=b+1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}F[i+1+k(t-b-1),t-1]\cdot\binom{m+n+kb-i-(k+1)t+k-1}{n-t}$$

$$=\binom{m+n}{m}-\binom{m+n-b}{b}-\sum_{t=b}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}F[i+k(t-b),\ t]\binom{m+n+kb-i-(k+1)t-1}{n-t-1}.$$

因 $F(m,\ n)=\binom{m+n}{m}-f(m,\ n)$，故

$$f(m,\ n)=\binom{m+n-b}{m}+\sum_{t=b}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left\{\binom{i+k(t-b)+t}{t}-f\big(i+k(t-b),\ t\big)\right\}\binom{m+n+kb-i-(k+1)t-1}{n-t-1},$$

为使上述形式较为简明，我们以 k 代 $k+1$，n 代 $n-b$，v 代 $m-k(n-b)$，则得

定理 5 当 $n\geqslant0$，$b\geqslant0$，$k\geqslant2$，$v\geqslant1$ 时

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{v}{ki+v}\binom{k(n-i)+b}{n-i+b}\binom{ki+v}{i}$$

$$\sum_{=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k-1}\left\{\sum_{s=0}^{j}\frac{i}{i+ks}\binom{k(j-s)+b}{j-s+b}\binom{ks+i}{s}-\binom{kj+i+b}{j+b}\right\}\binom{k(n-j)+v-i-1}{n-j-1}$$

$$=\binom{kn+v}{n}.$$

当 $b=0$，令

$$h(n, v)=\sum_{i=0}^{n}\frac{v}{ki+v}\binom{k(n-i)}{n-i}\binom{ki+v}{i}-\binom{kn+v}{n},$$

则由定理5得

$$h(n, v)=-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k-1}h(j, i)\binom{k(n-j)+v-1-i}{n-j-1}.$$

因当 $n=0$ 时，对一切 v，$h(n, v)=0$；从而，对一切 n，v，$h(n, v)=0$，此即 Rohatgi 公式，再令 $k=2$，$v=1$，即得 Breusch 公式。也就是说：定理5可视为上述二公式（递推）推广形式。

本文的部分内容曾与电脑系周国华老师讨论过，得不少教益，谨此致谢。

参考文献

〔1〕Breusch, R. Advanced Problems and Solutions, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 217.

〔2〕Rohatgi, V. K. Some Combinatorial Identities Involving Lattice Paths, Amer. Math. Monthly, 73(1966), 507——508.

〔3〕Takacs, L. A Generalization of the Ballot Problems and its Application in the Theory of Gueues. J. Amer. Stat. Assn. 57(1962), 327——337.