

板-柱体系中等效板宽度的级数解

王 全 凤

(土木工程系)

提 要

本文用弹性薄板理论推出板-柱接触面上板的转角,令它等于抵抗同一荷载跨中有刚性段等效板的转角,从而得到等效板宽度的级数表达式。此式有个明显特点,能够比较容易地研究柱带跨度比对等效板宽度的影响,所得结论应用于工程实际是非常方便的。最后以计算图表的形式给出了等效板宽度,可供用等效框架法分析板-柱结构时使用。

随着板-柱体系在建筑结构中应用日益增加,如何用等效框架法合理地分析此类结构越来越被人重视。也就是说在分析抵抗水平荷载的板-柱结构时,取多宽的板带来等效框架梁比较合适。

(一) 板-柱接触面上假设的荷载分布

设 a 、 ηa 分别为荷载作用方向上柱子到柱间板带中线之间的距离, b 为垂直于荷载方向柱子到柱间板带中线的距离; $2u$ 、 $2v$ 为相应于 a 、 b 两个方向上柱子的截面尺寸,则典型的内部节间如图 1。集中弯矩 M 通过板-柱接触面施加在板上,平行于弯矩方向两个边界条件转角为零;垂直于弯矩方向两个边界条件等价于简支梁的边界条件^[2]。

从钢筋混凝土框架节点光弹性实验得知^[4],应力分布在接触面中部变化比较平缓,靠近四个角点变化比较急剧,这是角点应力集中的影响。所以本文假设在集中弯矩 M 作用下,板-柱接触面上荷载分布

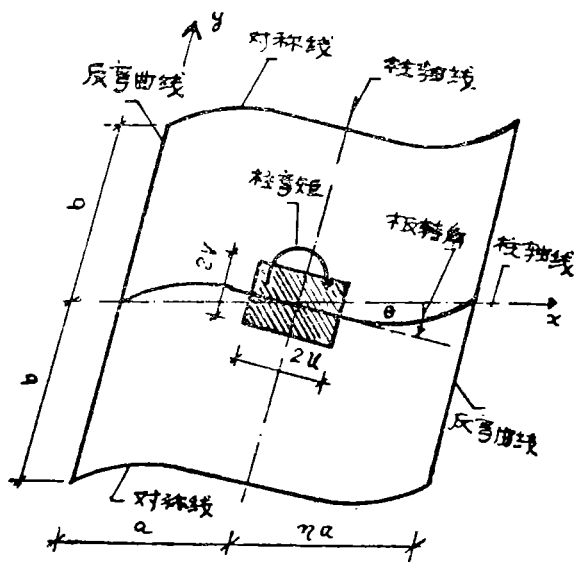


图 1

在 x 方向为抛物线分布, 在 y 方向为均匀分布, 如图 2。

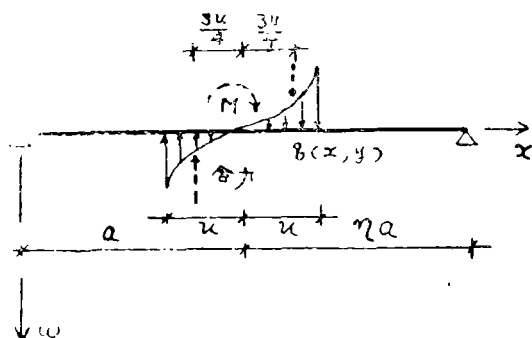


图 2

从力系等效

$$\frac{1}{3} \cdot \left\{ q(x, y) \right\}_{max} \cdot u \cdot \frac{3u}{2} = \frac{M}{2v};$$

整理

$$\left\{ q(x, y) \right\}_{max} = \frac{M}{u^2 v};$$

$$\therefore q(x, y) = \begin{cases} -\frac{M}{u^4 v} \cdot (x-a)^2 & a-u \leq x \leq a \\ \frac{M}{u^4 v} \cdot (x-a)^2 & a \leq x \leq a+u \end{cases} \quad (1)$$

把 $q(x, y)$ 在 $[0, (1+\eta)a]$ 上展成 Fourier 级数, 作奇式延拓

$$q(x, y) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M}{2(1+\eta)^2 a^2 v} \cdot Q_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} & -v \leq y \leq v \\ 0 & v \leq |y| \leq b \end{cases} \quad (2)$$

其中富氏系数

$$\frac{M}{2(1+\eta)^2 a^2 v} \cdot Q_m = \frac{2}{(1+\eta)a} \int_0^{(1+\eta)a} q(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} dx;$$

把(1)式代进上式

$$Q_m = \frac{4(1+\eta)a}{u^4} \cdot \left\{ \int_{a-u}^a \left[-(x-a)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} dx + \int_a^{a+u} (x-a)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} dx \right\}; \quad (4)$$

注意到

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} dx &= -\frac{(1+\eta)ax^2}{m\pi} \cdot \cos \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \\ &+ \frac{2(1+\eta)^2 a^2 x}{m^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} + \frac{2(1+\eta)^3 a^3}{m^3 \pi^3} \cdot \cos \frac{m\pi x}{(1+\eta)a}; \\ \int x \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} dx &= -\frac{(1+\eta)ax}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} + \frac{(1+\eta)^2 a^2}{m^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a}; \end{aligned}$$

$$\int \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} dx = -\frac{(1+\eta)a}{m\pi} \cdot \cos \frac{m\pi x}{(1+\eta)a};$$

积分(4)式

$$\begin{aligned} Q_m = 8m\pi \cdot \left\{ \frac{1}{\beta_m^2} \cdot \left[\left(\frac{a}{u} - 1 \right)^4 \cdot \left(-\frac{\cos \beta_m}{\beta_m^2} + \frac{\sin \beta_m}{\beta_m} - \frac{\cos \beta_m}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{u} \left(\frac{a}{u} - 1 \right)^3 \cdot \left(\cos \beta_m - \frac{\sin \beta_m}{\beta_m} \right) - \left(\frac{a}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{a}{u} - 1 \right)^2 \cdot \frac{\cos \beta_m}{2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{\beta}_m^2} \cdot \left[\left(\frac{a}{u} + 1 \right)^4 \cdot \left(\frac{\cos \bar{\beta}_m}{\bar{\beta}_m^2} + \frac{\sin \bar{\beta}_m}{\bar{\beta}_m} - \frac{\cos \bar{\beta}_m}{2} \right) + \frac{a}{u} \cdot \left(\frac{a}{u} + 1 \right)^3 \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\cos \bar{\beta}_m - \frac{\sin \bar{\beta}_m}{\bar{\beta}_m} \right) - \left(\frac{a}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{a}{u} + 1 \right)^2 \cdot \frac{\cos \bar{\beta}_m}{2} \right] - \frac{2}{\bar{\beta}_m^4} \cdot \left(\frac{a}{u} \right)^4 \cdot \cos \bar{\beta}_m \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\beta_m = \frac{m\pi(a-u)}{(1+\eta)a};$$

$$\bar{\beta}_m = \frac{m\pi(a+u)}{(1+\eta)a};$$

$$\bar{\beta}_m = \frac{m\pi}{1+\eta};$$

(二) 在 $q(x, y)$ 作用下, 板-柱接触面上 x 方向的转角

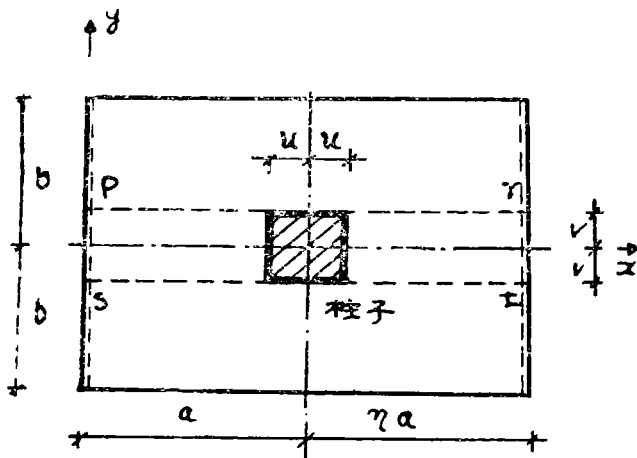


图 3

如图 3, $q(x, y)$ 在 $[0, (1+\eta)a]$ 上级数展开式表示柱上板带 prst 部分上荷载, 这部分板的相应挠度 ω 由微分方程(6)决定^[5]

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (6)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ——拉普拉斯算子;

$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ ——薄板的弯曲刚度;

E ——混凝土的弹性模量;

t ——薄板的厚度;

μ ——泊松比。

把(2)式代进(6)式

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega = -\frac{M}{2D\nu(1+\eta)^2 a^2} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \quad (7)$$

令

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (8)$$

其中 ω_1 是方程(7)的一个特解, 它与变量 y 无关, 也就是说满足方程

$$\frac{\partial^4 \omega_1}{\partial x^4} = -\frac{M}{2D\nu(1+\eta)^2 a^2} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \quad (9)$$

解方程(9)

$$\omega_1 = \frac{M(1+\eta)^2 a^2}{2D\nu} \sum_{m=1}^{\infty} (m\pi)^{-4} \cdot Q_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \quad (10)$$

从微分方程解的结构可知 ω_2 一定是方程(11)的解

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega_2 = 0; \quad (11)$$

设

$$\omega_2 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a};$$

则方程(11)的解

$$\begin{aligned} \omega_2 = \frac{M(1+\eta)^2 a^2}{2D\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + B_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right. \\ \left. + C_m \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + D_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a}; \end{aligned}$$

\because 板的挠曲面对称于 x 轴, $\therefore C_m = D_m = 0$

则上式

$$\omega_2 = \frac{M(1+\eta)^2 a^2}{2D\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + B_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \quad (12)$$

把(10)、(12)式代进(8)式

$$\begin{aligned} \omega = \frac{M(1+\eta)^2 a^2}{2D\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m\pi)^{-4} \cdot Q_m + A_m \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right. \\ \left. + B_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a}; \end{aligned} \quad (13)$$

又设柱间板带挠度为 ω_3 , 则 ω_3 必然满足方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega_3 = 0,$$

方程(14)的解

$$\omega_3 = \frac{M(1+\eta)^2 a^2}{2D\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[A'_m \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + B'_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + C'_m \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + D'_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \quad (15)$$

根据 $y = \pm \nu$ 时的连续条件和 $y = \pm b$ 时的边界条件定方程(13)、(15)中的系数 A_m 、 B_m 、 A'_m 、 B'_m 、 C'_m 及 D'_m 。

当 $y = \nu$ 时

$$\begin{cases} \omega = \omega_3 \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial y^3} \end{cases} \quad (16)$$

把(13)、(15)式代进上式

$$\begin{cases} (A_m - A'_m) \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m + (B_m - B'_m) \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m - C'_m \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m - D'_m \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m + E_m = 0 \\ (A_m - A'_m) \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m + (B_m - B'_m) \cdot (\operatorname{sh} \bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m) - C'_m \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m - D'_m \cdot (\operatorname{ch} \bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m) = 0 \\ (A_m - A'_m) \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m + (B_m - B'_m) \cdot (2 \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m) - C'_m \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m - D'_m \cdot (2 \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m) = 0 \\ (A_m - A'_m) \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m + (B_m - B'_m) \cdot (3 \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m) - C'_m \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m - D'_m \cdot (3 \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_m \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\bar{\alpha}_m = \frac{m\pi \nu}{(1+\eta)a}$$

$$E_m = (m\pi)^{-4} \cdot Q_m$$

解方程(17)

$$\begin{cases} A_m - A'_m = E_m \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}_m}{2} \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m - \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m \right) \\ B_m - B'_m = -\frac{E_m}{2} \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m \\ C'_m = E_m \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}_m}{2} \cdot \operatorname{ch} \bar{\alpha}_m - \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m \right) \\ D'_m = \frac{E_m}{2} \cdot \operatorname{sh} \bar{\alpha}_m \end{cases} \quad (18)$$

当 $y = b$ 时

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial y^3} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

把(15)式代进上式

$$\begin{cases} A'_m \cdot \text{sh} \alpha_m + B'_m \cdot (\text{sh} \alpha_m + \alpha_m \cdot \text{ch} \alpha_m) + C'_m \cdot \text{ch} \alpha_m \\ \quad + D'_m \cdot (\text{ch} \alpha_m + \alpha_m \cdot \text{sh} \alpha_m) = 0 \\ A'_m \cdot \text{sh} \alpha_m + B'_m \cdot (3 \cdot \text{sh} \alpha_m + \alpha_m \cdot \text{ch} \alpha_m) + C'_m \cdot \text{ch} \alpha_m \\ \quad + D'_m \cdot (3 \cdot \text{ch} \alpha_m + \alpha_m \cdot \text{sh} \alpha_m) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\alpha_m = \frac{m\pi b}{(1+\eta)a}$

解方程 (20)

$$\begin{cases} A'_m = -\frac{1}{\text{sh} \alpha_m} \cdot (B'_m \cdot \alpha_m \cdot \text{ch} \alpha_m + C'_m \cdot \text{ch} \alpha_m + D'_m \alpha_m \cdot \text{sh} \alpha_m) \\ B'_m = -D'_m \cdot \frac{\text{ch} \alpha_m}{\text{sh} \alpha_m} \end{cases} \quad (21)$$

把 (18) 式代进 (21) 式

$$\begin{cases} A'_m = \frac{E_m}{\text{sh} \alpha_m} \cdot \left(\frac{\alpha_m \cdot \text{sh} \bar{\alpha}_m \cdot \text{ch}^2 \alpha_m}{2 \cdot \text{sh} \alpha_m} - \frac{\bar{\alpha}_m}{2} \cdot \text{ch} \bar{\alpha}_m \cdot \text{ch} \alpha_m + \text{sh} \bar{\alpha}_m \cdot \text{ch} \alpha_m \right. \\ \quad \left. - \frac{\alpha_m}{2} \cdot \text{sh} \bar{\alpha}_m \cdot \text{sh} \alpha_m \right) \\ B'_m = -\frac{E_m \cdot \text{sh} \bar{\alpha}_m \cdot \text{ch} \alpha_m}{2 \cdot \text{sh} \alpha_m} \end{cases} \quad (22)$$

再把上式代进 (8) 式中第一式, 並考虑到

$$\begin{cases} \text{ch}(\alpha_m - \bar{\alpha}_m) = \text{ch} \alpha_m \cdot \text{ch} \bar{\alpha}_m - \text{sh} \alpha_m \cdot \text{sh} \bar{\alpha}_m \\ \text{sh}(\alpha_m - \bar{\alpha}_m) = \text{sh} \alpha_m \cdot \text{ch} \bar{\alpha}_m - \text{ch} \alpha_m \cdot \text{sh} \bar{\alpha}_m \\ \text{ch}^2 \alpha_m - \text{sh}^2 \alpha_m = 1 \end{cases}$$

得 $A_m = \frac{E_m}{\text{sh} \alpha_m} \cdot \left[-\frac{\alpha_m \cdot \text{sh} \bar{\alpha}_m}{2 \cdot \text{sh} \alpha_m} - \frac{\bar{\alpha}_m}{2} \cdot \text{ch}(\alpha_m - \bar{\alpha}_m) - \text{sh}(\alpha_m - \bar{\alpha}_m) \right] \quad (23)$

把 (13) 式对 x 求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{M(1+\eta)^2 a^2}{2D\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m + A_m \cdot \text{ch} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} + B_m \cdot \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \cdot \text{sh} \frac{m\pi y}{(1+\eta)a} \right] \\ &\quad \cdot \frac{m\pi}{(1+\eta)a} \cdot \cos \frac{m\pi x}{(1+\eta)a} \end{aligned} \quad (24)$$

则在板-柱界面及柱中 x 方向板的转角分别为

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{\begin{cases} x=a-u \\ y=0 \end{cases}} \\ &= \frac{M(1+\eta)a}{2D\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (E_m + A_m) \cdot m\pi \cdot \cos \beta_m \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{\begin{cases} x=a+u \\ y=0 \end{cases}} \\ &= \frac{M(1+\eta)a}{2D\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (E_m + A_m) \cdot m\pi \cdot \cos \bar{\beta}_m \end{aligned} \quad (26)$$

$$\theta_3 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}} = \frac{M(1+\eta)a}{2D\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (E_m + A_m) \cdot m\pi \cdot \cos \bar{\beta}_m \quad (27)$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (28)$$

(三) 在集中弯矩M作用下等效板的转角

用等效框架法分析板-柱结构时,首先碰到的问题是取多宽的板来等效框架梁比较合适。我们知道即使是柔性柱,柱子的轴向刚度比起板的弯曲刚度还是大得多,所以假设等效板在板-柱接触面上的弯曲刚度为无穷大(图4)。等效板在集中弯矩M及单位集中弯矩作用下弯矩图如图5所示:

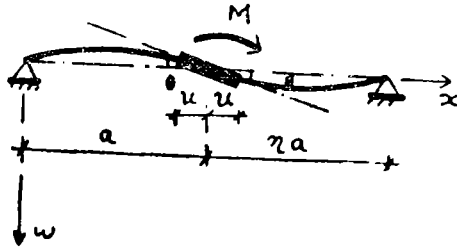


图4

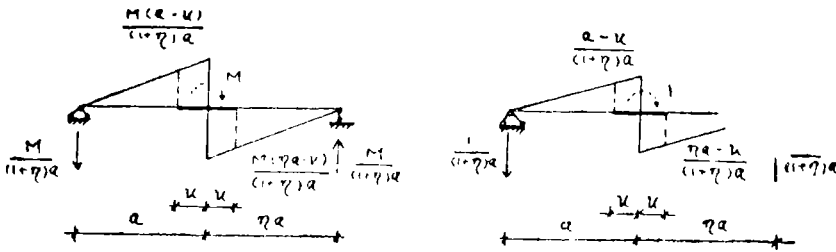


图5

用图乘法可得等效板刚性段的转角

$$\theta = \frac{2Ma}{Et^3 b' (1+\eta)^2} \cdot \left[\left(1 - \frac{u}{a}\right)^3 + \left(\eta - \frac{u}{a}\right)^3 \right] \quad (29)$$

式中 $2b'$ —等效板的宽度。

(四) 等效板宽度的级数表达式

令板-柱接触面上 x 方向的平均转角 $\bar{\theta}$ 等于抵抗同一弯矩M等效板刚性段的转角 θ , 即

$$\bar{\theta} = \theta; \quad (30)$$

把(28)、(29)式代进上式整理

$$\frac{b'}{b} = \frac{\left[\left(1 - \frac{u}{a}\right)^3 + \left(\eta - \frac{u}{a}\right)^3 \right] \cdot \frac{\nu}{a}}{9 \cdot (1 - \mu^2) \cdot (1 + \eta)^3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \Delta} \quad (31)$$

式中

$$\Delta = \sum_{m=1}^{\infty} (m\pi)^{-3} \cdot Q_m \cdot (1 + A''_m) \cdot (\cos \beta_m + \cos \bar{\beta}_m + \cos \bar{\bar{\beta}}_m)$$

$$A''_m = \frac{A_m}{E_m};$$

若 $\eta = 1$, 即为等跨度柱间板带, 上式

$$\frac{b'}{b} = \frac{\left(1 - \frac{u}{a}\right)^3 \cdot \frac{\nu}{a}}{36 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{b}{a} \cdot \Delta}, \quad (32)$$

(五) 讨 论 与 结 论

1. 在荷载作用方向, 柱间板带跨度比 η 的变化对等效板宽度的影响:

从式(31)我们知道, 板的等效宽度与 $\frac{b}{a}$ 及 $\frac{u}{a}$ 的比值有关, 而柱间板带跨度比 η 的变化又引起 $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{u}{a}$ 的变化。下面我们取不同的 η 值来说明柱间板带跨度比 η 的变化对等效板宽度的影响, 计算的结果列于表1。

从表中得知, 当 $\frac{b}{a}$ 从 0.5 变到 1, η 从 1 变到 0.4 时, 等效板的宽度与 $\eta = 1$ 时的相对差值都在 5% 之内; 当 $\frac{b}{a}$ 在 1 到 1.25 范围, η 从 1 变到 0.5 时, 等效板宽度与 $\eta = 1$ 时数值相比, 除少数超过 5%, 其余 88% 都在 5% 之内。而且从表中我们还可以看到, η 数值对等效板宽度的影响随着 $\frac{b}{a}$ 数值的增大而增大。从上面我们可以得出, 在工程常用范围内, η 数值的变化对等效板宽度的影响不大。

2. $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{u}{a}$ 的值对等效板宽度的影响:

从表1我们还可以看出, 无论 $\frac{b}{a}$ 取什么数值, 等效板宽度的值随着 $\frac{b}{a}$ 比值增大而减少; 同时也可以看到, 无论 $\frac{u}{a}$ 取什么数值, 等效板宽度的值随着 $\frac{u}{a}$ 比值增大而增大。

3. 柱边长之比 $\frac{\nu}{u}$ 的变化对等效板宽度的影响:

表 1

b/a	$\frac{b'/b}{\eta}$ u/a	0.05	0.75	0.1	0.125	0.15
0.5	1	.668441	.717544	.771312	.807514	.837759
	0.9	.651541 (2.53)	.706202 (1.57)	.761105 (1.32)	.799486 (1.01)	.831829 (0.708)
	0.8	.642234 (3.92)	.699526 (2.51)	.752993 (2.38)	.792937 (1.82)	.827130 (1.27)
	0.7	.649315 (2.86)	.698611 (2.92)	.748356 (2.98)	.739711 (2.22)	.825708 (1.44)
	0.6	.629697 (5.81)	.636061 (2.99)	.745753 (3.31)	.788471 (2.37)	.824565 (1.58)
	0.5	.643530 (3.73)	.708039 (1.33)	.752124 (2.49)	.790370 (2.14)	.823938 (1.65)
	0.4	.661507 (1.04)	.720579 (-0.423)	.757954 (1.73)	.795190 (1.54)	.822030 (1.88)
0.75	1	.500085	.548674	.603061	.644036	.681335
	0.9	.484719 (3.07)	.535924 (2.32)	.589910 (2.18)	.631642 (1.92)	.670070 (1.65)
	0.8	.476889 (4.64)	.529299 (3.53)	.581209 (3.62)	.623624 (3.17)	.662913 (2.70)
	0.7	.482785 (3.46)	.528781 (3.63)	.579049 (3.98)	.622668 (3.32)	.663213 (2.66)
	0.6	.473526 (5.30)	.534323 (2.62)	.583956 (3.17)	.629151 (2.31)	.670135 (1.64)
	0.5	.491931 (1.63)	.553471 (-0.874)	.600982 (0.345)	.644909 (-0.136)	.685035 (-0.543)
	0.4	.517577 (-3.50)	.578702 (-5.47)	.623248 (-3.35)	.669055 (-3.89)	.705208 (-3.50)
1	1	.387538	.428168	.474086	.509766	.543131
	0.9	.344731 (3.31)	.416711 (2.68)	.461689 (2.62)	.497415 (2.42)	.531159 (2.20)
	0.8	.368907 (4.81)	.411690 (3.85)	.454853 (4.06)	.491035 (3.67)	.525296 (3.28)
	0.7	.374619 (3.33)	.413311 (3.47)	.455588 (3.90)	.493229 (3.24)	.528877 (2.62)
	0.6	.371037 (4.26)	.421872 (1.47)	.464786 (1.96)	.504674 (0.999)	.541702 (0.263)
	0.5	.389599 (-0.532)	.442727 (-3.40)	.485720 (-2.45)	.526544 (-3.29)	.564469 (-3.93)
1.25	1	.312766	.346228	.384153	.413869	.441864
	0.9	.302284 (3.35)	.336635 (2.77)	.373615 (2.74)	.403204 (2.58)	.431354 (2.38)
	0.8	.297996 (4.72)	.333058 (3.80)	.368650 (4.04)	.398727 (3.66)	.427400 (3.27)
	0.7	.303402 (2.99)	.335664 (3.05)	.370893 (3.45)	.402567 (2.73)	.432771 (2.06)
	0.6	.302186 (3.38)	.344687 (0.445)	.381071 (0.802)	.415195 (-0.320)	.447216 (-1.21)
	0.5	.318943 (-1.98)	.364052 (-5.15)	.401306 (-4.47)	.437128 (-5.62)	.470711 (-6.53)

表中括号数值为 η 取表中值与 η 取 1 时等效板宽度相对差值的百分比。

现以等跨柱间板带为例, 当柱的边长之比分别为 $v/u = 0.5$ 和 $v/u = 1.5$ 时, 根据 (32

式算出等效板宽度与 $\nu/u=1$ 时等效板宽度的比较列于表 2。

表 2

b/a	b'/b ν/u u/a	0.05	0.1	0.15
0.5	1	.668441	.771312	.837759
	0.5	.657206 (1.68)	.761811 (1.23)	.830605 (0.854)
	1.5	.683470 (-2.25)	.788635 (-2.25)	.855206 (-2.08)
0.75	1	.500085	.603061	.681335
	0.5	.490579 (1.90)	.594384 (1.44)	.673333 (1.18)
	1.5	.512915 (-2.57)	.619698 (-2.76)	.701679 (-2.99)
1	1	.387538	.474086	.543131
	0.5	.379911 (1.97)	.466954 (1.51)	.536128 (1.29)
	1.5	.397861 (-2.66)	.487976 (-2.93)	.561168 (-3.32)
1.25	1	.312766	.384153	.441864
	0.5	.306551 (1.99)	.378300 (1.52)	.436010 (1.33)
	1.5	.321182 (-2.69)	.395597 (-2.97)	.456987 (-3.42)

表中括号数值分别为 ν/u 取该行比值与 ν/u 取 1 时等效板宽度相对差值的百分比。

从上表可以看出, 当柱的边长比值从 0.5 变到 1.5 时, 板的等效宽度与 $\nu/u=1$ 时相比, 最大差值不大于 3.5%。由此可以得出, 柱边长比值在 0.5—1.5 这个范围, 对板的等效宽度影响不大。

4. 外部节间 (边跨) 等效板宽度的计算:

取 $\eta=0$, 则典型的内部节间变成外部节间。此时根据 (31) 式算出板的等效宽度值列于表 3。

表 3

b'/b u/a b/a	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15
0.5	.668250 (0.0286)	.725642 (-1.13)	.770245 (0.138)	.810755 (-0.389)	.833154 (0.550)
0.75	.499970 (0.0230)	.556164 (-1.37)	.602228 (0.138)	.647415 (-0.525)	.677591 (0.550)
1	.387460 (0.0261)	.434346 (-1.44)	.473433 (0.138)	.512676 (-0.571)	.540146 (0.550)
1.25	.312706 (0.0191)	.351299 (-1.47)	.383624 (0.138)	.416268 (-0.584)	.439435 (0.549)

表中括号数值为与 η 取 1 时等效板宽度相对比值的百分比。

从上表我们看到, 在 $\eta=0$ 和 $\eta=1$ 时, 等效板宽度的计算结果相差无几, 最大差值仅

有 1.47%。可见外部节间完全可以按内部节间处理。

(六) 等效板宽度的计算图表

为了设计上使用方便, 本文就一般工程实践常用的不同 b/a 及 u/a 的值根据 (32) 式算出相应的 b'/b 之值列于表 4*。并绘制出相应的等效板宽度的计算图表见图 6。通过计算比较得知, 如果 b/a 比值在图表中 b/a 比值之间, 仍可用内插法查图表求得等效板宽度。

表 4

$\delta/b \quad u/a$ b/a	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15
0.5	.668441	.717544	.771312	.807614	.837759
0.75	.500085	.548674	.603061	.644036	.681335
1	.387538	.428168	.474086	.509766	.543131
1.25	.312766	.346228	.384153	.413869	.441864

计算图表适用条件:

1) $\mu = 0$ 。若 $\mu = \frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{3}$, 则应把从图表查得值分别乘以 1.029 或 1.125。

2) $0.5 \leq \frac{v}{u} \leq 1.5$ 。

3) 既适用于等跨柱间板带, 又适用于不等跨的柱间板带。

4) 对外部节间也适用。

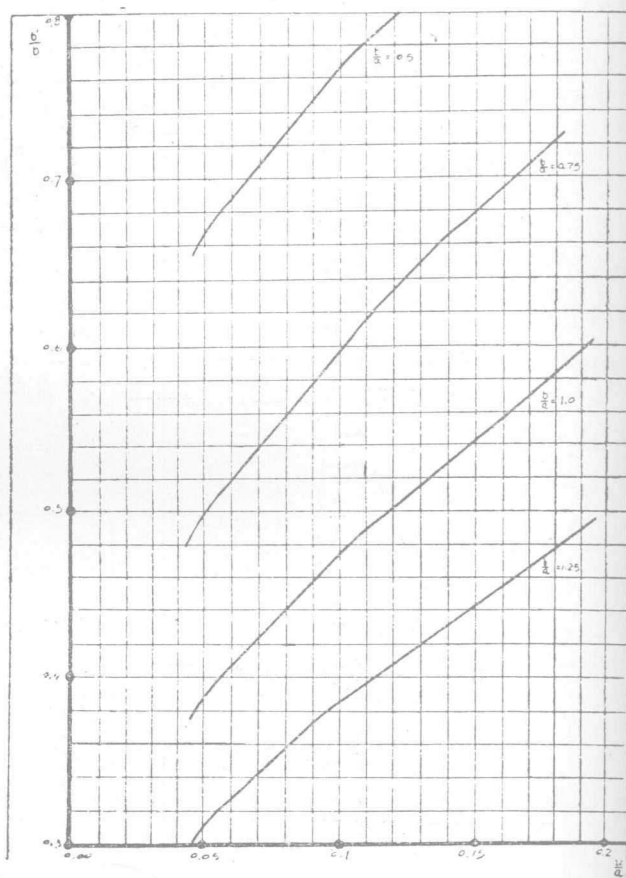


图 6

• 精确度为 0.01 时板的等效宽度计算值。

(七) 计 算 实 例

某板-柱体系高层住宅底层平面,典型的计算单元如图7,试确定等效板的宽度 $2b'$ 。

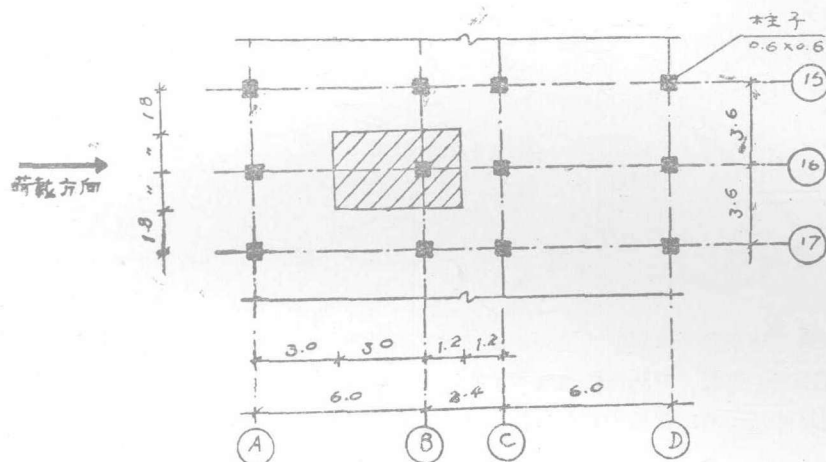


图7

已知条件

$$a = 3\text{m}, \quad b = 1.8\text{m}, \quad \frac{b}{a} = 0.6;$$

$$u = v = 0.3\text{m}, \quad \frac{u}{a} = 0.1;$$

$$\eta a = 1.2\text{m}, \quad \eta = 0.4$$

典型内部节间如图7阴影所示,由表4或图6内插

$$\frac{b'}{b} = 0.7$$

若用(31)式计算 $\frac{b'}{b} = 0.703069$,相对差值为0.437%,可见查表4或图6既方便又精确。

$$\therefore 2b' = 2 \times 0.7 \times 1.8 = 2.52\text{米}$$

根据上述“讨论与结论”第四点,外部节间等效板宽度亦取2.52米,所以整个计算单元等效板宽度取2.52米。

参 考 文 献

- [1] Wong Y. C., Coull A., Effective Slab Stiffness in Flat Structures, Proc. Inst. Civ. Engrs., Part 2, 1980, 69, Sept, 721—735.
- [2] Aalami B., Moment-Rotation Relation between Column and Slab, J. Am. Concr. Inst., 1972, 69, 263—269.
- [3] Pecknold D. A., Slab Effective Width for Equivalent Frame Analysis, J. Am. Concr. Inst., 1975, 72, 135—137.
- [4] 冶金工业部建筑研究总院, 科学技术成果报告(钢筋混凝土框架节点光弹性应力分析), 1981.
- [5] Timoshenko S. and Woinowsky-Kreiger S., Theory of Plates and Shells, 2nd edh. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [6] 清华大学结构力学教研组编, 结构力学(上册), 人民教育出版社出版, 1979.