boost变换与自旋1/2的粒子

车　济　方

（物 理 系）

近几年来，在相对论量子理论中，较广泛地使用一种所谓“boost”变换*，这种变换是将四维空间中静止粒子的波函数变换为具有确定动量运动的波函数。因此，它对与动量有关的物理量有较为简明的特点。boost变换虽然属于正常顺时Lorentz变换，但并不是Lorentz群的一个子群，然而有些作者[1]，却将它与Lorentz速度变换混为同一变换，这是不恰当的。本文将在四维动量空间中建立boost变换，并结合自旋1/2的粒子讨论它的一些基本性质。

在相对论中，速度为$\vec{v}=(0,\ 0,\ -v)$的Lorentz速度变换矩阵

$$\Lambda(v)=\begin{pmatrix}\beta & \beta v & 0 & 0\\ \beta v & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

式中$\beta=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}$。如果以四维动量$p_\mu=(E,\vec{p})$描述自由粒子，且有$p'_\mu=\Lambda^\nu_\mu p_\nu$，其不变性长度

$$p_\mu p^\mu=E^2-\vec{p}^2=m^2, \qquad (2)$$

m是粒子的静质量。因此，可以经过一个变换使粒子从静止状态沿$m\neq 0$的四维矢量$m_\mu=(m,0)$“提升(boost)”到具有动量为$\vec{p}$的运动状态，并记为

$$p_\mu=L_\mu{}^\nu(\vec{p})m_\nu \qquad (3)$$

boost变换矩阵$L(\vec{p})$是速度变换矩阵对于

$$\beta=chb=\frac{E}{m},\qquad \beta v=shb=\frac{|\vec{p}|}{m},$$

式中b为Lorentz角。$L(\vec{p})$应满足正交关系

$$L_\mu{}^\nu g^{\mu\alpha}L_\alpha{}^\beta=g^{\nu\beta} \qquad (4)$$

而

$$g^{\mu\nu}=\begin{cases}+1 & \mu=\nu=0\\ -1 & \mu=\nu=1、2、3、\\ 0 & \mu\neq\nu、\end{cases}$$

因此，可求得$L(\vec{p})$的四维协变形式

$$L_{\mu\nu}(\vec{p})=g_{\mu\nu}-\frac{(p+m)_\mu(p+m)_\nu}{m\cdot(p+m)}+\frac{2p_\mu m_\nu}{m^2} \qquad (5)$$

---

* “boost”变换至今还未有确定的物理的中文命名，故仍沿用“boost”变换，或简称“boost”。

式中左边第三项表明 boost 算符具有内在的非对称性。由（5）式所建立的变换不满足群的封闭性，因此它不能构成一个群，自然也不是Lorentz 群的一个子群。但是$\Lambda(v)$和四维转动矩阵$\Lambda(R)$的乘积可以表为正常顺时 Lorentz 变换 L_0中的任意一个变换。作$L=\Lambda(v)\cdot\Lambda(R)$的无穷小变换

$$L_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu} \tag{6}$$

且有

$$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu} \tag{7}$$

这里$\omega_{\mu\nu}$应是转动变换

$$\omega_{ij}(R)=\varepsilon_{ijk}\theta k \tag{8}$$

和速度变换

$$\omega_{\mu\nu}(v_x)=b_x I_{\mu\nu} \tag{9}$$

等的组合[2]。这六个无穷小参量 θi 和 bi 在群 L_0 中存在六个无穷小生成元 $J_{\mu\nu}$，并满足相应的代数

$$[J_{\mu\nu},\ J_{\rho\sigma}]=i(J_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}+J_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}+J_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-J_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}) \tag{10}$$

作变换

$$J_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk},\qquad K_i=J_{oi}, \tag{11}$$

那末（10）式变为

$$\begin{aligned}&[J_i,\ J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k\\&[J_i,\ K_j]=i\varepsilon_{ijk}K_k\\&[K_i,\ K_j]=-i\varepsilon_{ijk}J_k\end{aligned} \tag{12}$$

因而角动量算符$\vec{J}$生成转动变换，boost算符$\vec{K}$生成速度变换。若用幺正变换表示，即

$$U_{A(R)}=e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J}},\qquad U_{L(\vec{p})}=e^{-i\vec{b}\cdot\vec{K}} \tag{13}$$

为解除（12）式中的耦合，再作变换

$$\vec{A}=\frac{1}{2}[\vec{J}+i\vec{K}]\quad,\quad \vec{B}=\frac{1}{2}[\vec{J}-i\vec{K}], \tag{14}$$

对易关系（12）变为

$$\begin{aligned}&[A_i,\ A_j]=i\varepsilon_{ijk}A_k\\&[B_i,\ B_j]=i\varepsilon_{ijk}B_k\\&[A_i,\ B_j]=0\end{aligned} \tag{15}$$

可见 A_i 和 B_i 满足角动量相同的对易关系，且没有耦合。这样，（13）式变为

$$\begin{aligned}&U_{A(R)}=e^{-i\vec{\theta}\cdot(\vec{A}+\vec{B})}\\&U_{L\vec{p}}=e^{-\vec{b}\cdot(\vec{A}-\vec{B})}\end{aligned} \tag{16}$$

显然转动算符是幺正的，而 boost 算符不是幺正的，但是 Hermite 的。

当$\vec{B}=0$时，$\vec{A}=\vec{J}^{(j)}$是L_0的（$2j+1$）维不可约表示（j，0），并记$U_A(j,0)$为$D^{(j)}(\Lambda)$，那末

$$D^{(j)}(\Lambda(R))=e^{-\vec{\theta}\cdot\vec{J}^{(j)}}$$

$$D^{(j)}[(L(\vec{p})]=e^{-\vec{b}\cdot\vec{J}^{(j)}} \tag{17}$$

当 $\vec{A}=0$ 时，$\vec{B}=\vec{J}^{(j)}$，L_0 的（2j+1）维不可约表示（0，j），记 $U_A^{(0,j)}$ 为 $\bar{D}^{(j)}(\Lambda)$，那末

$$\bar{D}^{(j)}[\Lambda(R)]=e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J}^{(j)}}$$
$$\bar{D}^{(j)}[L(\vec{p})]=e^{+\vec{b}\cdot\vec{J}^{(j)}} \tag{18}$$

且有

$$\bar{D}^{(j)}(\Lambda)=D^{(j)+}(\Lambda^{-1}) \tag{19}$$

对于（j,0）+（0,j）直接乘积表示是2（2j+1）维不可约表示，矩阵

$$M^{(j)}(\Lambda)=\begin{pmatrix}D^{(j)}(\Lambda) & 0\\ 0 & \bar{D}^{(j)}(\Lambda)\end{pmatrix} \tag{20}$$

$D^{(j)}(\Lambda)$ 和 $\bar{D}^{(j)}(\Lambda)$ 是 L_0 的（2j+1）维不等价不可约表示，但 $M^{(j)}(\Lambda)$ 和 $\bar{M}^{(j)}(\Lambda)$ 是2（2j+1）维等价表示，因有

$$\bar{M}^{(j)}(\Lambda)=M^{(j)+}(\Lambda^{-1})=\beta^{-1}M^{(j)}(\Lambda)\beta \tag{21}$$

其中

$$\beta=\beta^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{22}$$

恰是Weyl表象中的Dirac β矩阵。

容易证明，（5）式是自旋1的boost算符。对于自旋 $\frac{1}{2}$ 的（$\frac{1}{2}$、0）boost算符可从（18）式得

$$D^{(\frac{1}{2})}(L\vec{p})=e^{-\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{\sigma}}=\mathrm{ch}\frac{b}{2}-\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\mathrm{sh}\frac{b}{2}$$
$$=[2m(E+m)]^{-\frac{1}{2}}(E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \tag{23a}$$

和

$$\bar{D}^{(\frac{1}{2})}(L_{\vec{p}})=[2m(E+m)]^{-\frac{1}{2}}(E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \tag{23b}$$

其中 $\hat{p}=\vec{p}/|\vec{p}|$。对于自旋 $\frac{1}{2}$ 的四维boost算符是

$$M^{(\frac{1}{2})}(L_{\vec{p}})=\left[2m(E+m)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[(E+m)+\begin{pmatrix}-\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}\cdot\vec{p}\right]$$

若Dirac矩阵取在Weyl表象，上式变为

$$M^{(\frac{1}{2})}(L\vec{p})=[2m(E+m)]^{-\frac{1}{2}}(\gamma_\mu p_\mu\gamma_0+m)。 \tag{24}$$

动量空间中自由粒子波函数可由boost算符表为

$$\varphi(\vec{p})=D(L_{\vec{p}})\varphi(O) \tag{25}$$

$\varphi(o)$ 为静止系中的波函数。如果强调参照系的转动性，$\varphi(o)$ 应改为 $\varphi(\hat{p})$。

静质量不为零，螺旋度在静止系为 $\frac{1}{2}$ 的自由粒子本征旋量 $\varphi^{(\lambda)}(\hat{p})$ 应满足本征方程

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\varphi^{(\lambda)}(\hat{p})=\lambda\varphi^{(\lambda)}(\hat{p}) \tag{26}$$

式中 $\lambda\pm\frac{1}{2}$。将 $j=\frac{1}{2}$ 的boost算符（23）作用于 $\varphi^{(\lambda)}(\hat{p})$ 上就可得到动量为 $\vec{p}$，螺旋度为λ

的自由粒子 $(\frac{1}{2},0)$ 和 $(0,\frac{1}{2})$ 的波函数

$$\varphi_L^{(\lambda)}(\vec{p})=(E+m)^{-\frac{1}{2}}(E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}})$$

$$\varphi_R^{(\lambda)}(\vec{p})=\left(E+m\right)^{-\frac{1}{2}}(E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}}) \qquad (27)$$

这里应用了静止系协变归一化波函数$(2m)^{\frac{1}{2}}\varphi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}})$。由(27)式可求得静质量为零的自由粒子波函数

$$\varphi_L^{(\lambda)}(\vec{p})\xrightarrow[m\to 0]{}(2E)^{\frac{1}{2}}(1-2\lambda)\varphi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}})$$

$$\varphi_R^{(\lambda)}(\vec{p})\xrightarrow[m\to 0]{}(2E)^{\frac{1}{2}}(1+2\lambda)\varphi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}}) \qquad (28)$$

显而易见，在静质量趋于零的情况下，$(\frac{1}{2},0)$ 表示仅有$\lambda=-\frac{1}{2}$的左旋态φ_L，而 $(0,\frac{1}{2})$ 表示仅有 $\lambda=\frac{1}{2}$右旋态 φ_R。

对于 $(\frac{1}{2},\ 0)+(0,\ \frac{1}{2})$ 的 boost 算符(24)，其相应的波函数是四分量旋量，即

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{p})&=M^{(\frac{1}{2})}(L\vec{p})\Psi(0)\\&=[2m(E+m)]^{-\frac{1}{2}}(\gamma_\mu p_\mu\gamma_0+m)\Psi(0)\end{aligned} \qquad (29)$$

容易证明，$\Psi(\vec{p})$ 满足自由粒子 Dirac 方程。

动量空间中自由粒子 Dirac 方程为

$$\begin{aligned}&(\gamma_\mu p_\mu-m)u(\vec{p})=0, \quad \bar{u}(\vec{p})(\gamma_\mu p_\mu-m)=0,\\&(\gamma_\mu p_\mu+m)v(\vec{p})=0, \quad \bar{v}(\vec{p})(\gamma_\mu p_\mu+m)=0,\end{aligned} \qquad (30)$$

在静止系中变为

$$\gamma_0 u(0)=u(0), \quad \gamma_0 v(0)=-v(0) \qquad (31)$$

在 Dirac－pauli 表象中，由于 γ_0 是对角的，故有

$$u(0)=(2m)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}, \quad v(0)=(2m)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\\chi\end{pmatrix} \qquad (32)$$

其中 φ 和 χ 是二分量旋量，因而

$$\begin{aligned}u^{(\lambda)}(\vec{p})&=M^{(\frac{1}{2})}(L\vec{p})u^{(\lambda)}(0)=\frac{\gamma_\mu p_\mu+m}{(E+m)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}\varphi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}})\\0\end{pmatrix}\\v^{(\lambda)}(\vec{p})&=M^{(\frac{1}{2})}(L\vec{p})v^{(\lambda)}(0)=\frac{-\gamma_\mu p_\mu+m}{(E+m)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}0\\\chi^{(\lambda)}(\hat{\vec{p}})\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (33)$$

显然这些四分量旋量满足自由粒子Dirac方程和螺旋度本征方程，它们正是通常的 Dirac 旋量[3]。

由(33)式很容算出矩阵

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1,2}u^{(\lambda)}(\vec{p})\bar{u}^{(\lambda)}(\vec{p})&=\frac{1}{2}(\gamma_\mu p_\mu+m)(1+\gamma_0)(\gamma_\mu p_\mu+m)\\&=\gamma_\mu p_\mu+m\end{aligned} \qquad (34)$$

和
$$\sum_{\lambda=1,2} v^{(\lambda)}(\vec{p})\bar{v}^{(\lambda)}(\vec{p}) = \gamma_\mu p_\mu - m$$

即可得 Dirac 旋量的完全性关系

$$\sum_{\lambda=1,2}[u^{(\lambda)}(\vec{p})\bar{u}^{(\lambda)}(\vec{p}) - v^{(\lambda)}(\vec{p})\bar{u}^{(\lambda)}(\vec{p})] = 2m \qquad (34)$$

以及正、负能量投影算符

$$\Lambda\pm(p) = \frac{\pm\gamma_\mu p_\mu + m}{2m} \qquad (25)$$

可以看出，上述这些推导较通常的方法简明。

显然地，boost算符还可以作逆boost运算，使粒子从运动状态回到静止状态，这相当于作非相对论极限情况。

参考文献

〔1〕如M. Carmeli and S. Malin, Representations of the rotation and Lorentz groups (1976).

〔2〕M. Carmeli and S. Malin, Fortschritte der physik 21(1973) 397.

〔3〕C. Itzykson and Zuber, Quantunm Field Theory (1980).