解多维抛物型方程的两个显式格式

曾 文 平

（数 学 系）

提 要

本文考虑含有混合导数的多维抛物型方程第一边值问题，提出两种绝对稳定的显式差分格式，它们是文[1,4]中提出的显式格式的推广。

一、问 题 的 提 出

考虑含有混合导数的多维抛物型方程第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\sum\limits_{k,j=1}^{p} a_{kj}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} & (x_1, x_2, \cdots, x_p)\in R,\ 0\leqslant t<T & (1.1)\\ u(x_1, x_2, \cdots, x_p, 0)=f(x_1, x_2, \cdots x_p) & (x_1, x_2\cdots, x_p)\in R & (1.2)\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_p,t)=g(x_1,x_2,\cdots,x_p,t) & (x_1,x_2,\cdots,x_p,t)\in\partial R\times\{0\leqslant t<T\} \end{cases}$$

其中$R\{0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots p\}$，$\partial R$为区域$R$的边界，系数$a_{ij}$满足下列三条件：

1. $a_{kj}=a_{jk}$　　$(k,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$均为常数；
2. 正定性，即

$$\sum_{k,j=1}^{p} a_{kj}\xi_k\xi_j>0 \tag{1.3}$$

3. $$\sum_{k=1}^{p} a_{kk}\xi_k^2-2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{p} a_{kj}\xi_k\xi_j<0 \tag{1.4}$$

其中$\xi_1,\ \xi_2\cdots,\ \xi_p$为不同时为零的任意实数。

文[1,4]中对$p=2$及$p=3$的情况加以研究，提出几个显式差分格式，本文把两个较为简便而实用的格式推广到任意p维空间去。

先引入下列记号：

令$\Delta x_k=h_k=\dfrac{1}{M}=h$，表示空间方向步长$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$，$M$为正整数。

$\tau=\left[\dfrac{T}{N}\right]$，表示时间方向步长，$N$为正整数。

$u^n=u^n_{l_k,l}=u(l_1h,\ \cdots l_{k-1}h,\ l_kh,\ l_{k+1}h,\ \cdots,\ l_{j-1}h,\ l_jh,\ l_{j+1}h,\ \cdots,\ l_pl,\ n\tau)$；

$u^n_{l_k\pm 1, l_j+1} = u[l_1 h, \cdots, l_{k-1}h, (l_k\pm 1)h, l_{k+1}h, \cdots l_{j-1}h, (l_j\pm 1)h, l_{j+1}h, \cdots, l_p h, n\tau]$。

二、一些预备知识

为证明差分格式的稳定性，我们需要如下几个引理。

引理1　实系数二次方程

$$x^2 + bx + c = 0$$

的两根按模不大于1的充要条件是

$$|b| \leqslant 1 + c, \qquad |c| \leqslant 1$$

（证见〔2〕，从略）

又由正定条件（1.3）立得

引理2　当（1.3）成立时，则有

$$a_{kk} > 0 \qquad (k = 1, 2\cdots, p)$$

（证略）

引理3　当$p=2$时，条件（1.3）包含了条件(1.4)，因而对$p=2$的情况，条件（1.4）自然可以取消。

证　只要在（1.3）中令$\xi_j = -\xi_j'$，然后把ξ_j'改写为ξ_j便得条件（1.4）。

三、显式格式（Ⅰ）

根据Du Fort—Frankel构造三层格式的思想，把文〔1〕中的显式格式（Ⅰ）推广至p维：

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}_{l_k, l_j} - u^{n-1}_{l_k, l_j}}{2\tau} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{kk} \dfrac{u^n_{l_k+1, l_j} - u^{n+1}_{l_k, l_j} - u^{n-1}_{l_k, l_j} + u^n_{l_k-1, l_j}}{h^2} \\ \qquad + 2\sum\limits_{\substack{k, j=1 \\ k<j}}^{p} a_{kj} \dfrac{u^n_{l_k+1, l_j+1} - u^n_{l_k-1, l_j+1} - u^n_{l_k+1, l_j-1} + u^n_{l_k-1, l_j-1}}{4h^2} & (3.1) \\ (l_1, l_2\cdots, l_p = 1, 2, \cdots, M-1;\ n = 1, 2, \cdots, N) \\ u^0_{l_k, l_j} = f(l_1 h, l_2 h, \cdots, l_p h) \quad (l_1, l_2, \cdots, l_p = 0, 1, \cdots, M) & (3.2) \\ u^1_{l_k, l_j}\ \text{用其他两层格式先算}\ (l_1, l_2, \cdots, l_p = 0, 1, \cdots, M) \\ u^n_{l_k, l_j} = g(l_1 h, l_2 h, \cdots, l_p h, n\tau) \quad (l_1, l_2, \cdots, l_p = 0\ \text{或}\ M;\ n = 0, 1, \cdots, N) \end{cases}$$

显见，其截断误差为$o\left[\tau^2 + \left(\dfrac{\tau}{h}\right)^2 + h^2\right]$

令$r = \tau/h^2$，则差分方程（3.1）可改写

$$\left\{1 + 2r\sum_{k=1}^{p} a_{kk}\right\} u^{n+1}_{l_k, l_j} = 2r\sum_{k=1}^{p} a_{kk}\left(u^n_{l_k+1, l_j} + u^n_{l_k-1, l_j}\right) +$$

$$+r\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{p}a_{kj}\left(u^n_{l_k+1,l_j+1}-u^n_{l_k-1,l_j+1}-u^n_{l_k+1,l_j-1}-u^n_{l_k-1,l_j-1}\right)$$

$$+\left\{1-2r\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\right\}u^{n-1}_{l_k,l_j} \tag{3.3}$$

因而是显式的。

令 $\varepsilon^n_{l_k,l_j}=\tilde{u}_{l_k,l_j}-u_{l_k,l_j}$，其中 $\tilde{u}_{l_k,l_j}$ 及 u_{l_k,l_j} 分别表示差分格式（3.1）、（3.2）的近似解及精确解，则误差 $\varepsilon^n_{l_k,l_j}$ 满足误差方程：

$$\left\{\begin{aligned}&\left\{1+2r\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\right\}\varepsilon^{n+1}_{l_k,l_j}=2r\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\left(\varepsilon^n_{l_k+1,l_j}+\varepsilon^n_{l_k-1,l_j}\right)\\&\qquad+r\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{p}a_{kj}\left(\varepsilon^n_{l_k+1,l_j+1}-\varepsilon^n_{l_k-1,l_j+1}-\varepsilon^n_{l_k+1,l_j-1}+\varepsilon^n_{l_k-1,l_j-1}\right)\\&\qquad+\left\{1-2r\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\right\}\varepsilon^{n-1}_{l_k,l_j} &&(3.4)\\&(l_1,l_2,\cdots,l_p=1,2,\cdots,M-1;\ n=1,2,\cdots,N)\\&\varepsilon^n_{l_k,l_j}=0\quad(l_1,l_2,\cdots,l_p=0\text{ 或 }M,\ m,\ n=0,1,\cdots,N) &&(3.5)\end{aligned}\right.$$

为证明稳定性，令 $\varepsilon^n_{l_k,l_j}=\rho^n e^{i(l_1\beta_1+\cdots+l_k\beta_k+\cdots+l_j\beta_j+\cdots+l_p\beta_p)h}$

代入（3.4）得：

$$\left(1+2r\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\right)\rho^2-4r\left[\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\cos\beta_kh-\sum_{k<j}a_{kj}\sin\beta_kh\sin\beta_jh\right]\rho-\left(1-2r\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\right)=0 \tag{3.6}$$

对照引理1，由引理2知，对任意的网格比 r 均有：

$$|c|=\left|\frac{1-2r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}{1+2r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}\right|<1,$$

$$1+c=1-\frac{1-2r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}{1+2r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}=\frac{4r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}{1+2r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}$$

$$|b|=\left|\frac{4r\left[\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}\cos\beta_kh-\sum\limits_{k<j}a_{kj}\sin\beta_kh\sin\beta_jh\right]}{1+2r\sum\limits_{k=1}^{p}a_{kk}}\right|$$

欲证 $|b|\leqslant 1+c$，即欲证：

$$-\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\leqslant\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\cos\beta_kh-\sum_{k<j}a_{kj}\sin\beta_kh\sin\beta_jh\leqslant\sum_{k=1}^{p}a_{kk}$$

或者欲证：

$$\eta\overset{令}{=}\sum_{k=1}^{p}(1-\cos\beta_kh)a_{kk}+\sum_{k<j}a_{kj}\sin\beta_kh\sin\beta_jh>0$$

及

$$\xi\overset{令}{=}\sum_{k=1}^{p}(1+\cos\beta_kh)a_{kk}-\sum_{k<j}a_{kj}\sin\beta_kh\sin\beta_jh>0$$

事实上，由条件（1.3）有

$$\eta=2\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\sin^2\frac{\beta_kh}{2}+4\sum_{k<j}a_{kj}\sin\frac{\beta_kh}{2}\cos\frac{\beta_kh}{2}\sin\frac{\beta_jh}{2}\cos\frac{\beta_jh}{2}$$

$$\geqslant2\left[\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\sin^2\frac{\beta_kh}{2}\cos^2\frac{\beta_kh}{2}+2\sum_{k<j}a_{kj}\sin\frac{\beta_kh}{2}\cos\frac{\beta_kh}{2}\sin\frac{\beta_jh}{2}\cos\frac{\beta_jh}{2}\right]>0$$

而由条件（1.4）有

$$\xi=2\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\cos^2\frac{\beta_kh}{2}-4\sum_{k<j}a_{kj}\sin\frac{\beta_kh}{2}\cos\frac{\beta_kh}{2}\sin\frac{\beta_jh}{2}\cos\frac{\beta_jh}{2}$$

$$\geqslant2\left[\sum_{k=j}^{p}a_{kk}\cos^2\frac{\beta_kh}{2}\sin^2\frac{\beta_kh}{2}-2\sum_{k<j}a_{kj}\sin\frac{\beta_kh}{2}\cos\frac{\beta_kh}{2}\sin\frac{\beta_jh}{2}\cos\frac{\beta_jh}{2}\right]>0$$

根据引理1，方程（3.6）的两根$|\rho_1|\leqslant1$，$|\rho_2|\leqslant1$，再根据稳定性判别法及Lax的收敛性与稳定等价性原理[2]，我们有如下的

定理 3.1　如果问题（1.1）—（1.2）的解的一切四阶偏导数存在且有界，则显式格式（Ⅰ）〔即（3.1）、（3.2）〕在条件（1.3）、（1.4）下绝对稳定且收敛。

四、显式格式（Ⅱ）

为得到另一个显式格式，于网格点（$l_1h, l_2h, \cdots, l_ph, n\tau$）处建立方程（1.1）的差分近似：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k,l_j}=\frac{1}{4p}\left\{\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k+1,l_j}+\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k-1,l_j}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k,l_j}\right.$$

$$\left.+(2p-\alpha)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k,l_j}\right\}+0(h^2)\qquad(4.1)$$

然后用向后差商代替$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k\pm1,l_j}$，而$\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k,l_j}$及$(2p-\alpha)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k,l_j}$分别用向前差商及中心差商代替，便得：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_{l_k,l_j}=\frac{1}{4p}\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{u^n_{l_k+1,l_j}-u^{n-1}_{l_k+1,l_j}}{\tau}+\sum_{k=1}^{p}\frac{u^n_{l_k-1,l_j}-u^{n-1}_{l_k-1,l_j}}{\tau}+\right.$$

$$+\alpha\frac{u^{n+1}_{l_k,l_j}-u^n_{l_k,l_j}}{\tau}+(2p-\alpha)\frac{u^{n+1}_{l_k,l_j}-u^{n-1}_{l_k,l_j}}{2\tau}\Bigg\}+0(\tau+h^2) \qquad (4.2)$$

对 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)^n_{l_k,l_j}$ 则先用二阶中心差商代替，然后按Du Fort—Frankel格式的方法用平均值代替 $u^n_{l_k,l_j}$，即：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)^n_{l_k,l_j}=\frac{u^n_{l_k+1,l_j}-2u^n_{l_k,l_j}+u^n_{l_k-1,l_j}}{h^2}+0(h^2)$$

$$=\frac{u^n_{l_k+1,l_j}-u^{n+1}_{l_k,l_j}-u^{n-1}_{l_k,l_j}+u^n_{l_k-1,l_j}}{h^2}+0\left[h^2+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right] \qquad (4.3)$$

最后，用中心差商代替 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\right)^n_{l_k,l_j}$：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\right)^n_{l_k,l_j}=\frac{u^n_{l_k+1,l_j+1}-u^n_{l_k-1,l_j+1}-u^n_{l_k+1,l_j-1}+u^n_{l_k-1,l_j-1}}{4h^2}+0(h^2) \qquad (4.4)$$

将（4.2）、（4.3）、（4.4）代入（1.1）便得：

$$\frac{1}{4p}\Bigg\{\sum_{k=1}^{p}\frac{u^n_{l_k+1,l_j}-u^{n-1}_{l_k+1,l_j}}{\tau}+\sum_{k=1}^{p}\frac{u^n_{l_k-1,l_j}-u^{n-1}_{l_k-1,l_j}}{\tau}+\alpha\frac{u^{n+1}_{l_k,l_j}-u^n_{l_k,l_j}}{\tau}$$

$$+(2p-\alpha)\frac{u^{n+1}_{l_k,l_j}-u^{n-1}_{l_k,l_j}}{2\tau}\Bigg\}$$

$$=\sum_{k=1}^{p}a_{kk}\frac{u^n_{l_k+1,l_j}-u^{n+1}_{l_k,l_j}-u^{n-1}_{l_k,l_j}+u^n_{l_k-1,l_j}}{h^2}$$

$$+2\sum_{k<j}a_{kj}\frac{u^n_{l_k+1,l_j+1}-u^n_{l_k-1,l_j+1}-u^n_{l_k+1,l_j-1}+u^n_{l_k-1,l_j-1}}{4h^2} \qquad (4.5)$$

其截断误差为 $0\left[\tau+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2+h^2\right]$

若令 $r_{kj}=a_{kj}\tau/h^2$（k，$j=1$，$2\cdots$，p），则得如下的显式差分格式（Ⅱ）：

$$\begin{cases} u^{n+1}_{l_k,l_j}=\dfrac{1}{p+\dfrac{\alpha}{2}+4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}}\Bigg\{\sum\limits_{k=1}^{p}(4pr_{kk}-1)\left(u^n_{l_k+1,l_j}+u^n_{l_k-1,l_j}\right) \\ \quad +\alpha u^n_{l_k,l_j}+2p\sum\limits_{k<j}r_{kj}\left[u^n_{l_k+1,l_j+1}-u^n_{l_k-1,l_j+1}-u^n_{l_k+1,l_j-1}+u^n_{l_k-1,l_j-1}\right] \\ \quad +\sum\limits_{k=1}^{p}\left(u^{n-1}_{l_k+1,l_j}+u^{n-1}_{l_k-1,l_j}\right)-4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}u^{n-1}_{l_k,l_j}+\dfrac{(2p-\alpha)}{2}u^{n-1}_{l_k,l_j}\Bigg\} \qquad (4.6) \\ (l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1;\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \\ \text{初边值条件同格式（Ⅰ）〔即（3.2）式〕} \end{cases}$$

其相应的误差方程为：

$$\begin{cases} \varepsilon^{n+1}_{l_k,l_j}=\dfrac{1}{p+\dfrac{\alpha}{2}+4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}}\left\{\sum\limits_{k=1}^{p}(4pr_{kk}-1)\left(\varepsilon^{n}_{l_k+1,l_j}+\varepsilon^{n}_{l_k-1,l_j}\right)\right. \\ \quad+\alpha\varepsilon^{n}_{l_k,l_j}+2p\sum\limits_{k<j}r_{kj}\left[\varepsilon^{n}_{l_k+1,l_j+1}-\varepsilon^{n}_{l_k-1,l_j+1}-\varepsilon^{n}_{l_k+1,l_j-1}-\varepsilon^{n}_{l_k-1,l_j-1}\right] \\ \quad\left.+\sum\limits_{k=1}^{p}\left(\varepsilon^{n-1}_{l_k+1,l_j}+\varepsilon^{n-1}_{l_k-1,l_j}\right)-4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}\varepsilon^{n-1}_{l_k,l_j}+\dfrac{(2p-\alpha)}{2}\varepsilon^{n-1}_{l_k,l_j}\right\} \\ (ll_1,\ l_2\cdots,\ l_p=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1;\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \\ \varepsilon^{n}_{l_k,l_j}=0\quad(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p=0\text{ 或 }M,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \end{cases} \tag{4.7}$$

为证明稳定性，令 $\varepsilon^{n}_{l_k,l_j}=\rho^n e^{i(l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_p\beta_p)h}$

代入误差方程（4.7）得：

$$\left[p+\frac{\alpha}{2}+4p\sum_{k=1}^{p}r_{kk}\right]\rho^2-\left\{2\sum_{k=1}(4pr_{kk}-1)\cos\beta_n h+\alpha-8p\sum_{k<j}r_{kj}\sin\beta_k h\sin\beta_j h\right\}\rho$$

$$-\left[p-\frac{\alpha}{2}-4p\sum_{k=1}^{p}r_{kk}+2\sum_{k=1}^{p}\cos\beta_k h\right]=0 \tag{4.8}$$

下面应用引理1证明二次方程（4.8）的两根 $|\rho_1|\leqslant1$ 及 $|\rho_2|\leqslant1$，此时

$$c=-\frac{p-\dfrac{\alpha}{2}-4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}+2\sum\limits_{k=1}^{p}\cos\beta_k h}{p+\dfrac{\alpha}{2}+4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}}=-\frac{2p+2\sum\limits_{k=1}^{p}\cos\beta_k h}{p+\dfrac{\alpha}{2}+4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}}+1$$

欲证 $|c|<1$，只要证

$$0<\frac{2p+2\sum\limits_{k=1}^{p}\cos\beta_k h}{p+\dfrac{\alpha}{2}+4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}}<2$$

由引理2，当 $\alpha\geqslant0$ 时上式左端不等式恒成立，面右端不等式即

$$\alpha+8p\sum_{k=1}^{p}r_{kk}-2\sum_{k=1}^{p}\cos\beta_k h>0$$

当 $\alpha\geqslant2p$ 时恒成立。

又 $b=\dfrac{1}{p+\dfrac{\alpha}{2}+4p\sum\limits_{k=1}^{p}r_{kk}}\left\{2\sum\limits_{k=1}^{p}(4pr_{kk}-1)\cos\beta_k h+\alpha-8p\sum\limits_{k<j}r_{kj}\sin\beta_k h\sin\beta_j h\right\}$，

欲证 $|b|<1+c$，即应证：

$$\eta=8p\sum_{k=1}^{p}r_{kk}(1-\cos\beta_k h)+8p\sum_{k<j}r_{kj}\sin\beta_k h\sin\beta_j h>0$$

及

$$\zeta=2\alpha+8p\sum_{k=1}^{p}r_{kk}(1+\cos\beta_k h)-4\sum_{k=1}^{p}\cos\beta_k h-8p\sum_{k<j}r_{kj}\sin\beta_k h\sin\beta_j h>0$$

事实上，由正定条件（1.3）得：

$$\eta=16p\left[\sum_{k=1}^{p}r_{kk}\sin^2\frac{\beta_k h}{2}+2\sum_{k<j}r_{kj}\sin\frac{\beta_k h}{2}\cos\frac{\beta_k h}{2}\sin\frac{\beta_j h}{2}\cos\frac{\beta_j h}{2}\right]$$

$$\geqslant16p\left[\sum_{k=1}^{p}r_{kk}\sin^2\frac{\beta_k h}{2}\cos^2\frac{\beta_k h}{2}+2\sum_{k<j}r_{kj}\sin\frac{\beta_k h}{2}\cos\frac{\beta_k h}{2}\sin\frac{\beta_j h}{2}\cos\frac{\beta_j h}{2}\right]>0$$

又由引理2及条件（1.4），当$\alpha\geqslant2p$时有：

$$\zeta=2\left[\alpha-2\sum_{k=1}^{p}\cos\beta_k h\right]+16p\left[\sum_{k=1}^{p}r_{kk}\cos^2\frac{\beta_k h}{2}\right.$$

$$\left.-2\sum_{k<j}r_{kj}\sin\frac{\beta_k h}{2}\cos\frac{\beta_k h}{2}\sin\frac{\beta_j h}{2}\cos\frac{\beta_j h}{2}\right]$$

$$\geqslant2\left[\alpha-2\sum_{k=1}^{p}\cos\beta_k h\right]+16p\left[\sum_{k=1}^{p}r_{kk}\cos^2\frac{\beta_k h}{2}\sin^2\frac{\beta_k h}{2}\right.$$

$$\left.-2\sum_{k<j}r_{kj}\sin\frac{\beta_k h}{2}\cos\frac{\beta_k h}{2}\sin\frac{\beta_j h}{2}\cos\frac{\beta_j h}{2}\right]>0$$

综上所述，要使$|c|\leqslant1$及$|b|\leqslant1+c$，必须取$\alpha\geqslant2p$从而根据引理1，方程（4.8）的两根$|\rho_1|\leqslant1$，$|\rho_2|\leqslant1$。再由稳定性判别法及Lax等价性原理立即可得

定理4.1　如果问题（1.1）、（1.2）的解的一切四阶偏导数存在且有界，则显式格式（Ⅱ）〔即（4.6）、(3.2)〕，当$\alpha\geqslant2p$且满足条件（1.3）、（1.4）时绝对稳定且收敛。

最后，必须指出：当$p=2$时，显式格式（Ⅰ）即文〔1〕中格式（Ⅰ）；当$p=2$时的显式格式（Ⅰ）及（Ⅱ），根据引理3，只要满足正定条件（1.3）及取$\alpha=4$便得绝对稳定的显式格式。当$p=3$，$\alpha=6$时的显式格式（Ⅱ）即文[4]中的格式。

数值例子表明，本文提出的两种显式格式是可行的、有效的。

为使用方便起见，我们把$p=2$、3的显式格式（Ⅰ）、（Ⅱ）分别写出如下（初边值条件与（3.2）同，从略）：

（i）格式（Ⅰ），当$p=2$时为

$$\frac{u^{n+1}_{k,j}-u^{n-1}_{k,j}}{2\tau}=a_{11}\frac{u^n_{k+1,j}-u^{n+1}_{k,j}-u^{n-1}_{k,j}-u^n_{k-1,j}}{h^2}$$

$$+2a_{12}\frac{u^n_{k+1,j+1}-u^n_{k-1,j+1}-u^n_{k+1,j-1}+u^n_{k-1,j-1}}{4h^2}$$

$$+a_{22}\frac{u^n_{k,j-1}-u^{n+1}_{k,j}-u^{n-1}_{k,j}+u^n_{k,j-1}}{h^2}$$

当$p=3$时为

$$\frac{u^{n+1}_{k,j,l}-u^{n-1}_{k,j,l}}{2\tau}=a_{11}\frac{u^n_{k+1,j,l}-u^{n+1}_{k,j,l}-u^{n-1}_{k,j,l}+u^n_{k-1,j,l}}{h^2}$$

$$+a_{22}\frac{u^n_{k,j+1,l}-u^{n+1}_{k,j,l}-u^{n-1}_{k,j,l}+u^n_{k,j-1,l}}{h^2}$$

$$+a_{33}\frac{u^n_{k,j,l+1}-u^{n+1}_{k,j,l}-u^{n-1}_{k,j,l}+u^n_{k,j,l-1}}{h^2}$$

$$+2a_{12}\frac{u^n_{k+1,j+1,l}-u^n_{k-1,j+1,l}-u^n_{k+1,j-1,l}+u^n_{k-1,j-1,l}}{4h^2}$$

$$+2a_{23}\frac{u^n_{k,j+1,l+1}-u^n_{k,j-1,l+1}-u^n_{k,j+1,l-1}+u^n_{k,j-1,l-1}}{4h^2}$$

$$+2a_{31}\frac{u^n_{k+1,j,l+1}-u^n_{k+1,j,l-1}-u^n_{k-1,j,l+1}+u^n_{k-1,j,l-1}}{4h^2}$$

（ii）格式（Ⅱ），当$p=2$时为

$$u^{n+1}_{k,j}=\frac{1}{2+\frac{\alpha}{2}+8(r_{11}+r_{22})}\Big\{(8r_{11}-1)\left(u^n_{k+1,j}+u^n_{k-1,j}\right)$$

$$+(8r_{22}-1)(u^n_{k,j+1}+u^n_{k,j-1})+\alpha u^n_{k,j}$$

$$+4r_{12}\left[u^n_{k+1,j+1}-u^n_{k-1,j+1}-u^n_{k+1,j-1}+u^n_{k-1,j-1}\right]$$

$$+\left(u^{n-1}_{k+1,j}+u^{n-1}_{k-1,j}+u^{n-1}_{k,j+1}+u^{n-1}_{k,j-1}\right)-8(r_{11}+r_{22})u^{n-1}_{k,j}+\frac{(4-\alpha)}{2}u^{n-1}_{k,j}\Big\}$$

而当$p=3$时为

$$u^{n+1}_{k,j,l}=\frac{1}{3+\frac{\alpha}{2}+12\sum\limits_{\lambda=1}^{3}r_{ii}}\Big\{(12r_{11}-1)(u^n_{k+1,j,l}+u^n_{k-1,j,l})$$

$$+(12r_{22}-1)(u^n_{k,j+1,l}+u^n_{k,j-1,l})+(12r_{33}-1)(u^n_{k,j,l+1}+u^n_{k,j,l-1})$$

$$+\alpha u^n_{k,j,l}+6r_{12}(u^n_{k+1,j+1,l}-u^n_{k-1,j+1,l}-u^n_{k+1,j-1,l}+u^n_{k-1,j-1,l})$$

$$+6r_{23}(u^n_{k,j+1,l+1}-u^n_{k,j+1,l-1}-u^n_{k,j-1,l+1}+u^n_{k,j-1,l-1})$$

$$+6r_{31}(u^n_{k+1,j,l+1}-u^n_{k-1,j,l+1}-u^n_{k+1,j,l-1}+u^n_{k-1,j,l-1})$$

$$+\left(3-\frac{\alpha}{2}-12\sum_{i=1}^{3}r_{ii}\right)u^{n-1}_{k,j,l}+u^{n-1}_{k+1,j,l}+u^{n-1}_{k-1,j,l}+u^{n-1}_{k,j+1,l}+u^{n-1}_{k,j-1,l}$$

$$+u^{n-1}_{k,j,l+1}+u^{n-1}_{k,j,l-1}\Big\}$$

其中$r_{ij}=a_{ij}\tau/h^2$（$i,j=1,2,3$）。

参 考 文 献

〔1〕曾文平，解含有混合导数的抛物型方程的两种显式格式，福州大学学报，3，(1982)。

〔2〕南京大学，偏微分方程数值解法，科学出版社，(1979)。

〔3〕R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference Methods for intial-Value Problem, (1967), second Edition.

〔4〕林鹏程，解含有混有导数的抛物型方程的一个显格式，高等学校计算数学学报，3，(1983)。