

非一致抛物型方程广义解弱最大值原理的一个证明

梁 汲 廷

(中山大学)

提 要

本文给出非一致抛物型方程广义解的弱最大值原理的一个另外的证明。

对非一致抛物型方程广义解的讨论,过去比较少见。最近在^[1]、^[2]中对非一致抛物型方程的广义解证明解的弱最大值原理和唯一性定理成立,推广了Trudinger^[3]对椭圆型方程得到的结果。本文目的在于给出非一致抛物型方程广义解弱最大值原理的一个另外的证明。

设 D 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界区域, $T>0$ 为一确定值。记 $Q = G \times (0, T)$,用 $V(Q)$ 记 $C^1(\bar{Q})$ 依范数

$$\|u\|_{V(Q)} = \left\{ \int_0^T \int_G \left[u_t^2 + a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\alpha} u_{,\beta} + u^2 \right] dx dt \right\}^{1/2}$$

作成的完备线性空间,其中

$$u_t \equiv -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{,\alpha} \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}.$$

函数 $a^{\alpha\beta}(x,t) = a^{\beta\alpha}(x,t)$ 在 Q 为可测,并且存在函数 $\lambda(x,t)$, $\mu(x,t)$ 使对所有 $(x,t) \in Q$ 和 $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in E^n$ 成立

$$0 < \lambda(x,t) |\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x,t) \xi^\alpha \xi^\beta \leq \mu(x,t) |\xi|^2; \quad (1)$$

$$\lambda^{-1}(x,t) \in L_{t^*}(Q), \quad t^* > n+2 - \frac{4}{(n+3) + \sqrt{n^2 + 6n + 1}}, \quad (2)$$

$$\mu(x,t) \in L_s(Q), \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t^*} < \frac{2}{n+m}, \quad (3)$$

$$m = \frac{2t^*}{1+t^*} \quad (4)$$

$\dot{V}(Q)$ 记 $V(Q)$ 中的闭子空间, $\dot{V}(Q)$ 中函数在Соболев意义下满足如边界条件
 $u(x,0) = 0, x \in G; u(x,t) = 0, x \in \partial G, t \in (0, T)$ 其中 ∂G 记 G 在 E^n 中的边界。

引理 1^[1] 设 $u \in \dot{V}(Q) \cap L_\infty(Q)$, 那么成立

$$\left(\int_0^T \int_G |\nabla_x u|^m dx dt \right)^{1/m} \leq \|\lambda^{-1}\|_{L_{t^*}(G)}^{1/2} \left[\int_0^T \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\alpha} u_{,\beta} dx dt \right], \quad (5)$$

$$\|u\|_{L^1(Q)} \leq C \left\{ \left[\int_0^T \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\alpha} u_{,\beta} dx dt \right]^{\frac{1}{2}} + \sup_{t \in (0,T)} \left(\int_G |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (6)$$

其中常数 $C > 0$ 不依赖于 u ,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \quad (7)$$

$$|\nabla_x u|^2 \equiv u_{,\alpha}^2$$

定理 设 $u \in V(Q)$ 满足下面的方程:

$$\int_0^T \int_G \left\{ v u_t + v_{,\alpha} \left[a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\beta} + b^{\alpha}(x,t) u + f^{\alpha}(x,t) \right] \right\} dx dt = 0$$

那么 $v, w \in \dot{V}(Q)$ 并且在 Q 为非负, 将 v 代入 (8), 利用条件 (12 和 (11')), 可得

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \int_0^t \int_G \left\{ uu_t + v, {}_a [a^{a\beta}(x, t) u, {}_\beta + b^a(x, t) u] \right. \\
 &\quad \left. + v [c^a(x, t) u, {}_a + d(x, t) u] \right\} dx dt \\
 &= \int_0^t \int_G \left\{ v (u_M^+)_t + v, {}_a a^{a\beta}(x, t) (u_M^+), {}_\beta + v c^a(x, t) (u_M^+), {}_a \right. \\
 &\quad \left. + v, {}_a b^a(x, t) u_M^+ + v d(x, t) u_M^+ \right\} dx dt \\
 &\quad + \int_0^t \int_G [v, {}_a b^a(x, t) + v d(x, t)] M dx dt \\
 &\geq \int_0^t \int_Q \left\{ v (u_M^+)_t + v, {}_a a^{a\beta}(x, t) (u_M^+), {}_\beta \right. \\
 &\quad \left. v [c^a(x, t) - b^a(x, t)] (u_M^+), {}_a \right. \\
 &\quad \left. + (v u_M^+), {}_a b^a(x, t) + (v u_M^+) d(x, t) \right\} dx dt \\
 &\geq \int_0^t \int_G \left\{ v (u_M^+)_t + v, {}_a a^{a\beta}(x, t) (u_M^+), {}_\beta \right. \\
 &\quad \left. + v [c^a(x, t) - b^a(x, t)] (u_M^+), {}_a + d_0 v u_M^+ \right\} dx dt \\
 &= \frac{1}{v+2} \int_G w^2(x, t) dx + \int_0^t \int_G \left\{ \frac{4(v+1)}{(v+2)^2} a^{a\beta}(x, t) w, {}_a w, {}_\beta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{v+2} [c^a(x, t) - b^a(x, t)] w w, {}_a + d_0 w^2 \right\} dx dt, \\
 &\quad \forall (0, T)
 \end{aligned} \tag{15}$$

下面证明在 Q 中 $w = 0$, 这隐含了 $u_M^+ = 0$ 为所欲证。为此定义

$$\begin{aligned}
 [u]^N &= \begin{cases} u & \text{当 } |u| \leq N \\ N \operatorname{sign} u & \text{当 } |u| > N \end{cases} \\
 t_N[u] &= \begin{cases} |u| - N & \text{当 } |u| > N \\ 0 & \text{当 } |u| \leq N \end{cases}
 \end{aligned}$$

根据假定 (2) 和 (9), 显然有

$$\iint_Q \left| \frac{b^a(x, t)}{\sqrt{\lambda}} \right| dx dt < +\infty$$

因而

$$\operatorname{mes} \left\{ \left| \frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right| > N \right\} \leq \frac{1}{N} \iint_Q \left| \frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right| dx dt \rightarrow 0, \text{ 当 } N \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\left(\iint_{\left\{ \left| \frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right| > N \right\} \cap Q} |b^a(x, t)|^r dx dt \right)^{1/r} \leq \varepsilon(N) \rightarrow 0, \text{ 当 } N \rightarrow +\infty.$$

取 $N > 0$ 充分大, 通过作用 Hölder 不等式和 (6), 成立

$$\begin{aligned}
 & \iint_Q \left| t_N \left[\frac{b^a(x,t)}{\sqrt{\lambda}} \right] w \cdot \sqrt{\lambda} w_a \right| dx dt \\
 & \leq \iint_{\left\{ \left| \frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right| > N \right\} \cap Q} |b^a(x,t)| |w| |w_a| dx dt \\
 & \leq \varepsilon(N) \|w\|_{L_1(Q)} \|\lambda^{-1}\|_{L_1(Q)}^{\frac{1}{2}} \left(\iint_Q a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{mes}^{\frac{2}{n+m} - \frac{1}{s} - \frac{1}{t^*}} Q \\
 & \leq \frac{1}{8} \left\{ \iint_Q a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} dx dt + \sup_{t \in (0,T)} \int_G w^2 dx \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

完全类似地

$$\begin{aligned}
 & \iint_Q \left| t_N \left(\frac{c^a(x,t)}{\sqrt{\lambda}} \right) w \cdot \sqrt{\lambda} w_a \right| dx dt \\
 & \leq \frac{1}{8} \left\{ \iint_Q a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} dx dt + \sup_{t \in (0,T)} \int_G w^2 dx \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

但是由 (15) 继续有

$$\begin{aligned}
 0 & \geq \frac{1}{v+2} \sup_{t \in (0,T)} \int_G w^2 dx + \iint_Q \left\{ \frac{4(v+1)}{(v+2)^2} a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{v+2} \left(\left| c^a(x,t) \right| + \left| b^a(x,t) \right| \right) |w w_a| + d_0 w^2 \right\} dx dt \\
 & = \frac{1}{v+2} \sup_{t \in (0,T)} \int_G w^2 dx + \iint_Q \left\{ \frac{4(v+1)}{(v+2)^2} a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{v+2} \left(\left| \left[\frac{c^a}{\sqrt{\lambda}} \right]^N \right| + \left| \left[\frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right]^N \right| \right) \sqrt{\lambda} |w w_a| + d_0 w^2 \right\} dx dt \\
 & \quad - \frac{2}{v+2} \iint_Q \left(\left| t_N \left(\frac{c^a}{\sqrt{\lambda}} \right) \right| + \left| t_N \left(\frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right) \right| \right) \sqrt{\lambda} |w w_a| dx dt \\
 & \geq \frac{1}{2(v+2)} \left\{ \sup_{t \in (0,T)} \int_G w^2 dx + \iint_Q a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} dx dt \right\} \\
 & \quad + \iint_Q \left\{ \frac{3v+2}{(v+2)^2} a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{v+2} \left(\left| \left[\frac{c^a}{\sqrt{\lambda}} \right]^N \right| + \left| \left[\frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right]^N \right| \right) \sqrt{\lambda} |w w_a| + d_0 w^2 \right\} dx dt, \quad (18)
 \end{aligned}$$

现在固定 N . 然后选 $v > 0$ 充分大, 使 $v > r$ 时, 对任何 $\xi = (\xi', \dots, \xi'') \in E^n$ 和任何实数 η , 成立

$$\begin{aligned}
 & \frac{3v+2}{(v+2)} \xi'^2 - \frac{2}{v+2} \left(\left| \left[\frac{c^a}{\sqrt{\lambda}} \right]^N \right| + \left| \left[\frac{b^a}{\sqrt{\lambda}} \right]^N \right| \right) \xi'^2 \eta + d_0 \eta^2 \\
 & \geq \frac{1}{v+2} \xi'^2 + \frac{d_0}{2} \eta^2. \quad (19)
 \end{aligned}$$

那么当 $v \geq r$ 时, 组合 (18), (19) 给出

$$0 \geq \frac{1}{2(v+2)} \left\{ \sup_{t \in (0,T)} \int_G w^2 dx + \iint_Q a^{\alpha\beta}(x,t) w_{,\alpha} w_{,\beta} dx dt \right\},$$

这隐含了 $w = 0$ 为所欲证。

为了完成定理的证明, 需要用到如下的

引理 2 设 $u \in \overset{\circ}{V}(Q)$ 满足(8)设其中条件 (1) 和(9)满足, 设 $f_0(x, t) \in L_{l'}(Q)$, $\frac{1}{l'} = 1 - \frac{1}{l}$, $f^a(x, t) \in L_{m'}(Q)$, $\frac{1}{m'} = 1 - \frac{1}{m}$. 那么存在常数 $c > 0$ 与 u, f_0, f^a 无关, 使

$$\|u\|_{L_L(Q)} \leq C \left(\|f_0(x, t)\|_{L_{m'}(Q)} + \sum_a \|f^a(x, t)\|_{L_{l'}(Q)} \right). \quad (20)$$

下面转来证明定理. 设 u 是定理中出现的函数, 那么 $u_M^+ \in \overset{\circ}{V}(Q)$. 设 $\varepsilon > 0$ 为任意, 除了方程(8)还考虑方程

$$\int_0^t \int_G \left\{ v(u_\varepsilon)_+ + v_a \left(a^{a\beta}(x, t) u_{\varepsilon, \beta} + b^a(x, t) u_\varepsilon + f^a(x, t) \right) + v \left(c^a(x, t) u_{\varepsilon, a} + (d(x, t) + \varepsilon) u_\varepsilon + f_0(x, t) \right) \right\} dx dt = 0 \quad (8')$$

$$\forall t \in (0, T), v \in \overset{\circ}{V}(Q),$$

其中 $(u_\varepsilon - u) \in \overset{\circ}{V}(Q)$.

开拓 u 使保持

$$u \leq M, \quad \text{当 } (x, t) \in \{E^n \times (-\infty, T) \setminus Q\};$$

然后开拓 $u_\varepsilon - u = 0$, 当 $(x, t) \in \{E^n \times (-\infty, T) \setminus Q\}$.

表示 u_ε 为

$$u_\varepsilon = (u_\varepsilon - u) + u,$$

那么

$$u_\varepsilon - M \leq 0, \quad \text{当 } (x, t) \in \{E^n \times (-\infty, T) \setminus Q\}$$

这意味着

$$u_{\varepsilon, M}^+ = \max(u_\varepsilon - M, 0) \in \overset{\circ}{V}(Q).$$

那么如前所证 (对方程(8')解的弱最大值原理成立) 在 Q 中

$$u_\varepsilon \leq M \quad (21)$$

由于(8), (8'), $w = u_\varepsilon - u \in \overset{\circ}{V}(Q)$ 显然满足方程:

$$\int_0^t \int_G \left\{ v w_t + v_a \left(a^{a\beta}(x, t) w_{\beta} + b^a(x, t) w \right) + v \left(c^a(x, t) w_a + (d(x, t) + \varepsilon) w + \varepsilon u \right) \right\} dx dt = 0, \quad (22)$$

$$\forall t \in (0, T), v \in \overset{\circ}{V}(Q)$$

对方程(22)作用引理 2 的结果, 给出

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_l(Q)} \leq C \|\varepsilon u\|_{L_{l'}(Q)} \leq C \|\varepsilon u\|_{L_l(Q)} \rightarrow 0^{**}, \quad \text{当 } \varepsilon \rightarrow 0.$$

从而

$$\| |u_\varepsilon - M| - |u - M| \|_{L_l(Q)} \leq \| (u_\varepsilon - M) - (u - M) \|_{L_l(Q)} \rightarrow 0, \quad \text{当 } \varepsilon \rightarrow 0.$$

* 容易验证 $l' < 2 < l$.

于是当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时

$$u_{\varepsilon, M}^+ = \frac{2}{3} \left(|u_\varepsilon - M| + (u_\varepsilon - M) \right)$$

在 $L_1(Q)$ 中强收敛于

$$u_M^+ = \frac{1}{2} \left(|u - M| + (u - M) \right)$$

根据(21)在 Q 内几乎处处有

$$u \leq M$$

亦即定理断言(13)成立。证讫。

参 考 文 献

- [1] 梁学信、梁汲廷、吴在德、于鸣岐, 非一致二阶线性抛物型方程广义解的最大值原理, 华侨大学学报, (1982), 8—11.
- [2] 梁汲廷、吴在德, 非一致抛物型方程的广义解, 数学学报, 26(1983).
- [3] Trudinger, N.S., Maximum Principles for linear non-uniformly elliptic operators with measurable coefficients, Math. Zeit., 156(1977), 291—310.