微分算子含双参数的高阶椭圆型方程的一般边值问题的奇摄动

郑永树　　　　倪守平

（华侨大学）　　　（福建师大）

一、引　　言

关于最高阶导数项含小参数的高阶椭圆型方程的奇摄动问题，过去大多数文章仅考虑方程含一个小参数的情况，例如文〔1〕—〔3〕等。在文〔5〕中，作者首先研究微分算子含双参数的高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动。尔后，文〔7〕对同样的含双参数的高阶椭圆型方程，研究了一般边值问题$A_{\varepsilon,\mu}$

$$L_{\varepsilon,\mu}\omega_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}\omega_{\varepsilon,\mu}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^{r}L_{r}\omega_{\varepsilon,\mu}+L_{0}\omega_{\varepsilon,\mu}=f(x),$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$B_{s}\omega_{\varepsilon,\mu}\big|_{\partial\Omega}=g_{s}(x)\big|_{\partial\Omega},\qquad (s=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{1.2}$$

在$\mu/\varepsilon\to 0$（$\varepsilon\to 0$）情况下的奇摄动。本文系文〔7〕的继续，研究问题（1.1），（1.2）在$\varepsilon/\mu\to 0$（$\mu\to 0$）情况下奇摄动。

上面有关记号含义如下：Ω表示n维欧氏空间的有界区域，$\partial\Omega$表示Ω的边界，并假设$\partial\Omega$是足够光滑；ε，μ为相互依赖的正小参数；L_0表示2m阶线性强椭圆型算子：

$$L_{0}\equiv\sum_{|\beta|\leqslant 2m}C_{\beta}(x)D^{\beta}\omega\equiv\sum_{k=0}^{2m}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}\omega, \tag{1.3}$$

式中

$$(-1)^{m}\sum_{|\beta|=2m}C_{\beta}(x)\xi^{\beta}\geqslant\alpha_{0}|\xi|^{2m}, \tag{1.4}$$

L_{2l}表示$2(m+l)$阶线性强椭圆型算子：

$$L_{2l}\omega\equiv\sum_{|\beta|\leqslant 2(m+l)}a_{\beta}(x)D^{\beta}\omega\equiv\sum_{k=0}^{(m+l)}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}\omega, \tag{1.5}$$

式中

$$(-1)^{m+l}\sum_{|\beta|=2(m+l)}a_{\beta}(x)\xi^{\beta}\geqslant\alpha_{1}|\xi|^{2(m+l)}, \tag{1.6}$$

其中α_0，α_1是正的常数；L_r表示$2m+r$阶线性偏微分算子：

$$L_r\omega \equiv \sum_{|\beta|\leqslant 2m+r} b_{r,\beta}(x)D^{\beta}\omega \equiv \sum_{k=0}^{2m+r} \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k} b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}\omega, \tag{1.7}$$

$$(r=1,\ 2,\cdots,2l-1)$$

又$B_s\omega$（$s=0,1,\cdots,\ m+l-1$）表示边界微分算子：

$$B_s\omega \equiv \sum_{|h|\leqslant n_s} b_h^{(S)}(x)D^h\omega.\quad 0\leqslant n_s\leqslant 2(m+l)-1, \tag{1.8}$$

式中$b_h^{(S)}(x)\in C^\infty(\partial\Omega)$，$C^\infty(\partial\Omega)$表示在$\partial\Omega$上是无限次可微的函数集合。其余记号：

$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n$；$h=(h_1,\cdots,h_n)$，$|h|=h_n+\cdots+h_n$；$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，

$\xi^{\beta}=(\xi_1^{\beta_1},\cdots\xi_n^{\beta_n})$，$|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}$，$D_{xi}^{\beta i}=\dfrac{\partial^{\beta_i}}{\partial x_i^{\beta_i}}$

假设边界微分算子系$\{B_s\}_{s=0}^{m+l-1}$是正则系，即满足条件：

(i) $\sum_{|h|=n_s} b_h^{(S)}(x)\nu^h\neq 0$，$x\in\partial\Omega$，其中$\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$表示$\partial\Omega$的单位法向量；

(ii) $n_i<n_j$，当$i<j$。

同时又假设摄动边值问题(1.1)——(1.2)存在唯一解$\omega_{\varepsilon,\mu}\in C^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$和退化问题$A_0$：

$$L_0\omega=f(x),\quad x\in\Omega \tag{1.9}$$

$$B_s\omega\Big|_{\partial\Omega}=g_s(x)\Big|_{\partial\Omega},\quad (s=0,1,\cdots,m-1) \tag{1.10}$$

对任意充分光滑的函数$f(x)$和$g(x)$存在唯一的充分光滑的解$\omega_0(x)$。关于解的存在和唯一性的条件，在文〔8〕中已给出。

二、形 式 渐 近 解

首先，假设解$\omega_{\varepsilon,\mu}(x)$具有如下形式的渐近展开式：

$$\omega_{\varepsilon,\mu}(x)\sim\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\omega_{l-j,j}(x) \tag{2.1}$$

将(2.1)式代入方程(1.1)并令左右两边关于$\frac{\varepsilon}{\mu}$和μ的同次幂的系数相等，得到关于$\omega_{l-j,j}(x)$（$j=0,\ 1,\cdots,p$；$p=0,1,\cdots$）的递推方程：

$$L_0\omega_{0,0}(x)=f(x),\quad x\in\Omega \tag{2.2}$$

$$L_0\omega_{p-j,j}(x)=-\sum_{r=1}^{2l-1}L_r\omega_{p-j,j-r}-L_{2l}\omega_{p-j-2l,j-2l} \tag{2.3}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\ p=1,2\cdots)$$

在上式及以后计算中，都将负下标的量取作零。

为了构作边界层项，在边界$\partial\Omega$的邻域建立局部坐标系：$(\rho,\varphi)=(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$

（其定义见〔4〕）然后又引进变量：

$$t=\frac{\rho}{\mu} \tag{2.4}$$

根据文〔6〕的结果，得到微分算子$L_{\varepsilon,\mu}$关于新变量（t，$\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$）有下面的分解式：

$$L_{\varepsilon,\mu}\equiv\mu^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k M_k+\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{2l}\sum_{k=1}^{n+1}\mu^k\widetilde{M}_k\right] \tag{2.5}$$

$$M_0\equiv\sum_{r=1}^{2l-1}b_{2m+r}(\varphi)D_t^{2m+r}+C_{2m}(\varphi)D_t^{2m} \tag{2.6}$$

$b_{2m+r}(\varphi)=b_{r,\ 2m+r,\ 0,\cdots,0}(\rho,\varphi)|_{\rho=0}$，$C_{2m}(\varphi)=C_{2m,0\cdots,0}(\rho,\varphi)|_{\rho=0}$。(2.5)式右边，$M_0$是关于t的2（$m+l$）－1阶的常系数常微分算子；$M_k$（$k=1,2,\cdots,n$），$\widetilde{M}_k$（$k=0,1,\cdots,n$）为关于t的不高于2（$n+l$）阶的变系数微分算子，其系数为关于t的多项式，次数不高于k。M_{n+1}，$\widetilde{M}_{n+1}$也为类似的微分算子，但其系数是变量（t，φ）的光滑函数。

因此，假设边界层项具有下面形式的渐近展开式：

$$V(t,\varphi)\sim\mu^{n_m}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j v_{p-j,j}(t,\ \varphi) \tag{2.7}$$

以分解式（2.5）右边的微分算子作用于（2.7）式右边，令

$$\left[M_0+\sum_{k=0}^{n+1}\mu^k M_k+\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{2l}\sum_{k=0}^{n+1}\mu^k\widetilde{M}_k\right]\cdot\left[\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j v_{p-j,j}(t,\varphi)\right]=0 \tag{2.8}$$

利用比较$\frac{\varepsilon}{\mu}$和μ同次幂系数的原理，得到关于$v_{p-j,j}(t,\varphi)$（$j=0,1,\cdots,p$；$p=0,1,\cdots$）的递推方程：

$$M_0 v_{0,0}=0, \tag{2.9}$$

$$M_0 v_{p-j,j}=-\sum_{k=1}^{n+1}M_k v_{p-j,j-k}-\sum_{k=0}^{n+1}\widetilde{M}_k v_{p-j-2l,j-k} \tag{2.10}$$

（$j=0,1,\cdots,p$；$p=1,2,\cdots$）

下面将给出形式的渐近展开式中待定函数应满足的定解条件。因此，假设边值问题(1.1)——(1.2)的解$\omega_{\varepsilon,\mu}$具有下面形式的渐近展开式：

$$\omega_{\varepsilon,\mu}\sim\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\omega_{p-j,j}+\mu^{n_m}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j v_{p-j,j} \tag{2.11}$$

将边界算子用局部坐标（ρ，φ）表示，即

$$\begin{aligned}B_s\omega\Big|_{\partial\Omega}&\equiv\sum_{|h|\leqslant n_s}\widetilde{b}_h^{(s)}(\rho,\varphi)D_\rho^{h_1}D_{\varphi_1}^{h_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{h_n}\omega\Big|_{\partial\Omega}\\&\equiv\Big[\widetilde{b}_{n_s}^{(s)}(\varphi)D_\rho^{m_s}\omega+\sum_{\substack{|h|\leqslant n_s\\h_1<n_s}}\widetilde{b}_h^{(s)}(\varphi)D_\rho^{h_1}D_{\varphi_1}^{h_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{h_n}\omega\Big]\Big|_{\partial\Omega}\end{aligned} \tag{2.12}$$

（$s=0,1,\cdots,m+l-1$）

由变量替换（2.4）式可知，

$$D_\rho^{n_s}=\mu^{-n_s}D_t^{n_s}$$

因此，边界算子Bs分解成

$$B^s\equiv\mu^{-n_s}(H_0^{(s)}+\mu H_1^{(s)}+\cdots+\mu^{n_s}H^{(s)}) \tag{2.13}$$

式中

$$H_0^{(s)}\equiv\tilde{b}_{n_s}^{(s)}(\varphi)D_t^{n_s} \tag{2.14}$$

$$H_j^{(s)}\equiv\sum_{h_2+\cdots+h\leqslant j}\tilde{b}^{(s)}_{n_s-j,h_2,\cdots,h_n}(\varphi)D_s^{n_s-j}D_{\varphi_1}^{h_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{h_n} \tag{2.15}$$

$$(j=1,2\cdots,n_s)$$

将展开式（2.11）代入边值条件（1.2），对于作用于边界层项展开式的边界算子用分解式（2.13），则

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^jB_s\omega_{p-j,j}+$$

$$+\mu^{n_m-n_s}(H_0^{(s)}+\mu H_1^{(s)}+\cdots+\mu^{n_s}H_{n_s}^{(s)})\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\nu_{p-j,j}=g_s(\varphi) \tag{2.16}$$

$$(s=0,1,\cdots,\ m+l-1)$$

式中$g_s(\varphi)=g_s(x)|_{\partial\Omega}$。

由边界算子系的正则性条件(ii)得知，$n_0<n_1<\cdots<n_{m+l-1}$。于是比较（2.16）式两边的ε/μ和μ的同次幂项的系数，则得到关于$\omega_{p-j,j}$和$\nu_{p-j,j}$（$j=0,1,\cdots,p$；$p=0,1\cdots$）的边值条件：

$$B_s\omega_{0,0}=g_s(\varphi), \tag{2.17}$$

$$B_s\omega_{p-j,j}=-\sum_{r=0}^{n_s}H_r^{(s)}\nu_{p-j,j+n_s-n_m-r}, \tag{2.18}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\ p=1,2,\cdots)\qquad(s=0,1,\cdots,m-1)$$

$$H_0^{(m)}\nu_{0,0}=g_m(\varphi)-B_m\omega_{0,0} \tag{2.19}$$

$$H_0^{(m)}\nu_{p-j,j}=-B_m\omega_{p-j,j}-\sum_{r=1}^{n_m}H_r^{(m)}\nu_{p-j,j-r} \tag{2.20}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\ p=1,2,\cdots)$$

$$H_0^{(m+k)}\nu_{p-j,j}=-\sum_{r=0}^{n_{m+k}}H_r^{(m+k)}\nu_{p-j,j-r} \tag{2.21}$$

$$(j=0,1,\cdots,\ p;\ p=0,1,\cdots,n_{m+k}-n_m-1)$$

$$H_0^{(m+k)}\nu_{n_{m+k}-n_m,j}=\begin{cases}-\sum\limits_{r=1}^{n_{m+1}}H_r^{(m+k)}\nu_{n_{m+k}-n_m-j,j-r}\\ \qquad(j=0,1,\cdots,n_{m+k}-n_m-1)\\ g_{m+k}(\varphi)-\sum\limits_{j=1}^{n_{m+k}}H_r^{(m+k)}\nu_{0,n_{m+k}-n_m-r}-B_{m+k}\omega_{0,0}\\ \qquad(j=n_{m+k}-n_m)\end{cases} \tag{2.22}$$

$$H_0^{(m+k)}\nu_{p-j,j}=-B_{m+k}\omega_{p-j,j-(n_{m+k}-n_m)}-\sum_{r=1}^{n_{m+k}}H_r^{(m+k)}\nu_{p-j,j-r} \tag{2.23}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\ p=n_{m+k}-n_m+1,\ n_{m+k}-n_m+2,\cdots)$$

$$(k=1,2,\cdots,l-1)$$

在以上各式中，略去了取边界值的记号。

利用递推方程（2.2），（2.3），（2.9），（2.10）和定解条件（2.17）—（2.23），可以依次确定展开式（2.11）中的每一个待定函数。

首先确定$\omega_{0,0}(x)$，由方程（2.2）和边值条件知道，它应是退化边值问题：

$$\begin{cases} L_0\omega_{0,0}=f(x)\ ,\ x\in\Omega \\ B_s\omega_{0,0}|\partial\Omega=g_s(\varphi),\quad (s=0,1,\cdots,m-1) \end{cases} \tag{2.24}$$

的解。

为了构作具有边界层性质的项，需要对常微分算子M_0的特征方程：

$$P(\lambda)\equiv\sum_{r=1}^{2l-1}b_{2m+r}(\varphi)\lambda^{2m+r}+C_{2m}(\varphi)\lambda^{2m}=0 \tag{2.25}$$

附加条件限制，即设方程（2.25）具有l个相异的负实部的根，并记之为$-\lambda_1(\varphi)$，$-\lambda_2(\varphi)$，…，$-\lambda_l(\varphi)$。

定义，如果方程（2.25）具有l个相异的负实部的根，则称摄动问题（1.1），（1.2）是正则退化的。

在以上假设条件下，当求得$\omega_{0,0}(x)$后，由方程（2.9）和初值条件（2.19），（2.21）确定$\nu_{0,0}(t,\varphi)$，即它为

$$M_0\nu_{0,0}=0, \tag{2.26}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_0^{(m)}\nu_{0,0}|_{t=0}=g_m(\varphi)-B_m\omega_{0,0}|\partial\Omega \\ H_0^{(m+k)}\nu_{0,0}|_{t=0}=0\quad (k=1,2,\cdots,l-1) \end{array}\right\} \tag{2.27}$$

的解，于是方程（2.26）具有边界层性质的解为

$$\nu_{0,0}(t,\varphi)=\sum_{r=1}^{l}C_re^{-\lambda_r(\varphi)t} \tag{2.28}$$

式中C_r（$r=1,2,\cdots,l$）由初值条件（2.27）确定，即由方程组：

$$\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{l}(-\lambda_r)^{n_m}C_r=\dfrac{g_m(\varphi)-B_m\omega_{0,0}(0,\varphi)}{\tilde{b}_{n_m}^{(m)}(\varphi)} \\ \sum\limits_{r=1}^{l}(-\lambda_r)^{n_{m+k}}C_r=0\ ,\quad (k=1,2\cdots,l-1) \end{cases} \tag{2.29}$$

求解。假定系数行列式：

$$D\equiv\begin{vmatrix} (-\lambda_1)^{n_m} & (-\lambda_2)^{n_m} & \cdots(-\lambda_l)^{n_m} \\ (-\lambda_1)^{n_m+1} & (-\lambda_2)^{n_m+1} & \cdots(-\lambda_l)^{n_m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (-\lambda_1)^{n_m+l-1} & (-\lambda_2)^{n_m+l-1} & \cdots(-\lambda_l)^{n_m+l-1} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.30}$$

那么由方程组（2.29）可唯一地确定出一组C_r（$r=1,2,\cdots,l$）亦即求得$\nu_{00}(t,\varphi)$为形如

（2.28）的函数，其中C_r（$r=1,2,\cdots,l$）为方程组（2.29）的解。

其下依次交替确定$\omega_{p-j,j}$和$\nu_{p-j,j}$（$j=0,1,\cdots,p$；$p=1,2,\cdots$）其求解程序与文〔4〕中相同。

下面仅对条件（2.30）成立的一个特殊情形进行讨论，即令

$$n_m=m+k \tag{2.31}$$

其中$0\leqslant k\leqslant m+l$，k为给定的非负整数。又令

$$n_{m+j}=m+k+j \quad (j=0,1,\cdots,l-1)$$

因此，由（2.31），（2.32）所规定的n_s（$m\leqslant s\leqslant m+l-1$）满足边界算子系的正则系条件（ii）。在（2.31）和（2.32）的情况下，边界算子B的分解式（2.13）中的$H_0^{(s)}$，当$s\geqslant m$时，

$$H_0^{(s)}\equiv\widetilde{b}^{(s)}_{k+s}(\varphi)D_t^{k+s} \quad (s=m,m+1,\cdots,m+l-1) \tag{2.33}$$

式中$\widetilde{b}^{(s)}_{k+s}(\varphi)\neq0$。从而行列式（2.30）为

$$D\equiv(-1)^{m+k}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_l)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \cdots & -\lambda_l\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (-\lambda_1)^{l-1} & (-\lambda_2)^{l-1} & \cdots & (-\lambda_l)^{l-1}\end{vmatrix}\neq0 \tag{2.34}$$

那么在（2.31）和（2.32）的特殊情形下，求得$\omega_{0,0}(x)$和$\nu_{0,0}(t,\varphi,)$之后，按照文〔4〕规定的求解程序，由边值问题（2.3），（2.18）和初值问题（2.10），（2.20）—（2.23），取$p=1$，又可以先后求得：$\omega_{1,0}(x)$，$\nu_{1,0}(t,\varphi)$；$\omega_{0,1}(x)$，$\nu_{0,1}(t,\varphi)$。然后取$p=2$，3，…这样继续下去，可以逐一地求得：$\omega_{p-j,j}(x)$，$\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$（$p=2,3,\cdots$；$j=0,1,\cdots,p$）如同文〔4〕得知，所求得边界层型函数$\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$具有如下形式的结构：

$$\sum_{j=1}^{l}p_j(t,\varphi)e^{-\lambda_j(\varphi)t} \tag{2.35}$$

其中$p_j(t,\varphi)$为t的多项式，它的系数是φ的光滑函数。

但是，由上面所求得的$\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$（$j=0,1,\cdots,p$；$p=0,1,\cdots$）都只在边界的η邻域有定义，为了得出在整个区域Ω有定义的边界层函数，引进函数$\Psi(x)\in C^\infty(\Omega)$，且$0\leqslant\Psi(x)\leqslant1$和

$$\Psi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{3}\eta;\\ 0, & \rho\leqslant\eta\end{cases}$$

并作函数：

$$\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi)=\Psi(x)\nu_{p-j,j}(t,\varphi) \quad (j=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,\cdots) \tag{2.36}$$

则知在边界的$\frac{1}{3}\eta$邻域内，$\widetilde{\nu}_{p-j,j}\equiv\nu_{p-j,j}$。

假定按照上述求解程序求得$\omega_{p-j,j}(x)$和$\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi)$（$p=0,1,\cdots,N$；$j=0,1,\cdots,p$），而置$\omega_{p-j,j}(x)\equiv0$（$p=N+1,\cdots,N+m-1$；$j=0,1,\cdots,p$），再由递推方程（2.10）及初值条件（2.20）—（2.23），求出$\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$，并由（2.36）作出$\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi)$（$p=N+1,$

…, $N+m+l-1$; $j=0,1,\cdots,p$）因此，摄动问题（1.1），（1.2）有如下的形式渐近解：

$$W^N_{\varepsilon,\mu}(x)\equiv\sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\omega_{p-j,j}(x)$$

$$+\mu^{m+k}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi) \tag{2.37}$$

关于$W^N_{\varepsilon,\mu}(x)$为形式渐近的证明如下：

为书写方便，记（2.37）式中

$$\omega^N_{\varepsilon,\mu}(x)\equiv\sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\omega_{p-j,j}(x) \tag{2.38}$$

$$\widetilde{\nu}_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)\equiv\mu^{m+k}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi) \tag{2.39}$$

当$x\in\Omega$时，由递推方程（2.2），（2.3）得

$$L_{\varepsilon\mu}\omega^N_{\varepsilon,\mu}(x)=f(x)+\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{2l}\mu^{2l}\sum_{p=N+1-4l}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^jL_{2l}\omega_{p-j,j}(x)$$

$$+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\sum_{p=N+1-r}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^jL_r\omega_{p-j,j}(x)$$

$$=f(x)+\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{N+1}\left[\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{2l}\mu^{2l}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{-4l}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{-r}\right]\Phi_1(x) \tag{2.40}$$

其中$\Phi_1(x)=O(l)$。

以Ω_δ表示边界$\partial\Omega$的δ邻域。当$x\in\Omega/\Omega_\eta$时，由$\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi)\equiv0$，（$j=0,1,\cdots,p$; $p=0,1,\cdots,N+m+l-1$）则

$$L_{\varepsilon,\mu}\widetilde{\nu}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)=0 \tag{2.41}$$

当$x\in\Omega_{\frac{1}{3}\eta}$时，由$\widetilde{\nu}_{p-j,j}(t,\varphi)\equiv\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$，得到

$$\widetilde{\nu}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)=\mu^{m+k}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$$

再由递推方程（2.12），（2.13），取$n=N+m+l-1$，得

$$L_{\varepsilon,\mu}\widetilde{\nu}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)\equiv\mu^{-2m}\left[M_0+\sum_{i=0}^{N+m+l}\mu^iM_i+\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{2l}\sum_{i=}^{N+m+l}\mu^i\widetilde{M}_i\right]\widetilde{\nu}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)$$

$$=\mu^{-m+k}\left[\sum_{i=1}^{N+m+l}\mu^i\sum_{p=N+m+l-1}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^jM_i\nu_{p-j,j}(t,\varphi)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{N+m+l}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{2l}\mu^i\sum_{p=N+m+l-}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\widetilde{M}_i\nu_{p-j,j}(t,\varphi)\right]$$

$$=\mu^{-m+k}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{N+n}\left[\sum_{i=1}^{N+m+l}\mu^i\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{l-i}+\sum_{i=0}^{N+m+l}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{2l}\mu^i\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{-(l+i)}\right]\Phi_2(x) \tag{2.42}$$

其中$\Phi_2(x)=O(1)$。又当$x\in\Omega_\eta/\Omega_{\frac{1}{3}\eta}$时，则$\rho\geqslant\frac{1}{3}\eta$，所以

$$L_{\varepsilon,\mu}\widetilde{\mu}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)=\mu^M\Phi_3(x) \tag{2.43}$$

对于任意正整数M成立，式中$\Phi_3(x)=O(1)$。

综合（2.40）—（2.43）式，得到在整个区域Ω上成立：

$$L_{\varepsilon,\mu}W^N_{\varepsilon,\mu}(x)=f(x)+G(\varepsilon,\mu)\Phi(x) \tag{2.44}$$

其中$\Phi(x)=O(1)$，

$$G(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\mu^{N+1}, & \text{当}\varepsilon/\mu^2\to\beta(\mu\to 0)(0\leqslant\beta<\infty)\\ \left(\dfrac{\varepsilon}{\mu}\right)^N\left[\mu+\mu^{h-m}\left(\dfrac{\varepsilon}{\mu}\right)^{m+l}\right], & \text{当}\varepsilon/\mu^2\to\infty(\mu\to 0)\end{cases} \tag{2.45}$$

置

$$Z_N(x)=\omega_{\varepsilon,\mu}(x)-W^N_{\varepsilon,\mu}(x) \tag{2.46}$$

由边界条件（2.17）—（2.23）得

$$B_sZ_N(x)\Big|_{\partial\Omega}=-\mu^{m-s}\sum_{r=0}^{h+s}\mu^r\sum_{p=N+1-m+s-r}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^jH_r^{(s)}\nu_{p-j,j}(0,\varphi)$$

$$=\gamma_s(\varphi,\varepsilon,\mu),\quad(s=0,1,\cdots,m-1) \tag{2.47}$$

$$B_sZ_N(x)\Big]_{\partial\Omega}=0,\quad(s=m,m+1,\cdots,m+l-1) \tag{2.48}$$

所以

$$B_sW^N_{\varepsilon,\mu}(x)\Big|_{\partial\Omega}=g_s(\varphi)-\gamma_s(\varphi,\varepsilon,\mu)=g_s(\varphi)+\widetilde{G}_s(\varepsilon,\mu)\widetilde{\Phi}_s(x) \tag{2.49}$$

其中$\widetilde{\Phi}_s(x)=O(1)$，

$$\widetilde{G}_s(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\mu^{m-s}\left(\dfrac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{N+1-m+s}\displaystyle\sum_{r=0}^{h+s}\mu^r\left(\frac{\varepsilon}{\mu}+\mu\right)^{-r}\\ \qquad\qquad(s=0,1,\cdots,m-1)\\ 0, \qquad(s=m,\cdots,m+l-1)\end{cases} \tag{2.50}$$

因此，$W^N_{\varepsilon,\mu}(x)$是摄动问题的形式渐近解。

三、余　项　估　计

下面将导出摄动问题的解$\omega_{\varepsilon,\mu}(x)$与所构作的形式渐近解$W^N_{\varepsilon,\mu}(x)$的余项估计。由(2.46)式，将$\omega_{\varepsilon,\mu}(x)=W^N_{\varepsilon,\mu}(x)+Z_N(x)$代入边值问题（1.1），（1.2），得到关于$Z_N(x)$的边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}Z_N(x)=-G(\varepsilon,\mu)\Phi(x),\quad \chi\in\Omega \tag{3.1}$$

$$B_sZ_N|_{\partial\Omega}=\gamma_s(\varphi,\varepsilon,\mu),\quad(s=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.2}$$

其中当$s\geqslant m$时，$\gamma_s(\varphi,\varepsilon,\mu)=0$。

取函数$\alpha_i(x)\in C^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$（$i=0,1,\cdots,m-1$），且满足下列条件：

$$\alpha_i(x)=\widetilde{G}_i(\varepsilon_0,\mu)p_i(x)$$

$$B_s\alpha_i(x)\Big|_{\partial\Omega}=\begin{cases}0, & (s=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m-1)\\ \gamma_i(\varphi,\varepsilon,\mu) & (s=i)\end{cases}$$

其中 $p_i(x)=O(1)$ $(i=0,1,\cdots,m-1)$。作函数

$$Z_N^{(1)}(x)=\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(x)$$

则

$$\|Z_N^{(1)}\|_{L_2}=O\left(\sum_{i=1}^{m-1}\widetilde{G}_i(\varepsilon_0,\mu)\right)=O\left(\widetilde{G}(\varepsilon,\mu)\right) \tag{3.3}$$

其中

$$\widetilde{G}(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\mu^{N+1}, & 当\varepsilon/\mu^2\to\infty\ (\mu\to0)\ (0\leqslant\beta<\infty)\\ \mu\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^N, & 当\varepsilon/\mu^2\to\infty\ (\mu\to0)\end{cases} \tag{3.4}$$

$$L_{\varepsilon,\mu}Z_N^{(1)}(x)=\widetilde{G}(\varepsilon,\mu)\Phi_4(x) \tag{3.5}$$

其中$\Phi_4(x)=O(1)$。又作函数

$$Z_N^{(2)}(x)=Z_N(x)-Z_N^{(1)}(x)$$

则 $Z_N^{(2)}$满足如下齐次边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}Z_N^{(2)}(x)=G(\varepsilon,\mu)\overline{\Phi}(x),\quad x\in\Omega \tag{3.6}$$

$$B_sZ_N^{(2)}(x)\Big|_{\partial\Omega}=0\quad(s=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.7}$$

其中$\overline{\Phi}(x)=O(1)$

假定当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$0<\mu\leqslant\mu_0$时，算子$L_{\varepsilon,\mu}$有一致有界的逆算子$L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$，即对于任意函数$\omega\in\hat{C}^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$（$\hat{C}^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$表示$c^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$中足齐次边界条件(3.7)的函数集合)成立

$$\|L_{\varepsilon,\mu}\omega\|_{L_2}\geqslant K_0\|\omega\|_{L_2} \tag{3.8}$$

其中k_0是正常数。

因此，由（3.6），（3.7）式得

$$\|Z_N^{(2)}\|_{L_2}\leqslant k_1G(\varepsilon,\mu) \tag{3.9}$$

从而由（3.3）和（3.9）式，则

$$\|Z_N\|_{L_2}\leqslant\|Z_N^{(1)}\|_{L_2}+\|Z_N^{(2)}\|_{L_2}\leqslant k_2G(\varepsilon,\mu) \tag{3.10}$$

以上k_1，k_2均为正的常数。

四、结　论

根据前面各部分的结果，我们对所讨论的摄动题问$A_{\varepsilon,\mu}$作如下假定：

（Ⅰ）算子L_0和L_{2l}分别为2m和$2(m+l)$阶的线性强椭圆型算子，算子L_r（$l=1,2,\cdots,2l-1$）为不高于$2m+r$阶的线性偏微分算子；

（Ⅱ）边界算子系 $\{B_j\}_{j=0}^{m+l-1}$ 是正则系；

（Ⅲ）问题$A_{\varepsilon,\mu}$的参数，即算子$L_{\varepsilon,\mu}$的系数，函数$f(x)$，$g_s(x)$（$s=0,1,\cdots,m+l-1$），边界$\partial\Omega$都是足够光滑的；

（Ⅳ）退化问题A_0的解存在且唯一；

（Ⅴ）摄动问题$A_{\varepsilon,\mu}$为正则退化的，即特征方程（2.25）具有l个相异的负实部的根；

（Ⅵ）算子$L_{\varepsilon,\mu}$有一致有界的逆算子$L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$（如前定义）；

（Ⅶ）ε,μ为相互依赖的正小参数，且$\varepsilon/\mu\to0$（$\mu\to0$）

因此，我们得到下面的结果：

定理 1　假设条件（Ⅰ）—（Ⅶ）成立，则问题$A_{\varepsilon,\mu}$的解$\omega_{\varepsilon,\mu}(x)$有渐近展开式：

$$\omega_{\varepsilon,\mu}(x)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\omega_{p-j,j}(x)+\mu^{m+k}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j}\mu^j\widetilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)+Z_N(x,\varepsilon,\mu)\tag{4.1}$$

其中$\omega_{0,0}(x)$为退化问题A_0的解；$\omega_{p-j,j}(x)$（$j=0,1,\cdots,p$；$p=1,2,\cdots,N$）由递推方程（2.2）和（2.18）确定；$\widetilde{v}_{p-j,j}(t\varphi)=\Psi(\rho)v_{p-j,j}(t,\varphi)$（$j=0,1,\cdots,p$；$p=0,1\cdots,N+m+l-1$）其中$v_{p-j,j}(t,\varphi)$是边界层函数，由递推方程（2.9）（2.10）和边值条件（2.19）——（2.23）确定。又若$\varepsilon/\mu^2\to\beta$（$\mu\to0$）（$0\leqslant\beta<\infty$），则余项$Z_N(x)$有如下估计式：

$$\|Z_N\|_{L_2}=0(\mu^{N+1})\tag{4.2}$$

对于$\varepsilon/\mu^2\to\infty(\mu\to0)$的情形，我们讨论一种特殊情况，即$\varepsilon=\mu^{1+\alpha}(0<\alpha<1)$。这时有

$$G(\varepsilon,\mu)=\mu^{\alpha N}(\mu+\mu^{(k-m)+(m+l)\alpha})=O(\mu^{\alpha N+\alpha_0})\tag{4.3}$$

定理 2　假设条件（Ⅰ）—（Ⅶ）成立。若$\varepsilon=\mu^{1+\alpha}$（$0<\alpha<1$），则问题$A_{\varepsilon,\mu}$的解$\omega_{\varepsilon,\mu}$仍有渐近展开式（4.1），而其余项$Z_N$有以下估计式：

$$\|Z_N\|_{L_2}=O(\mu^{\alpha N+\alpha_0})$$

其中$\alpha_0=\min〔1,k-m+(m+l)\alpha〕$。

参　考　文　献

〔1〕Вишик М. И. и Люстерник Л. А.；Решение некоторых задац о Возмшении В елупае матриц и самосапрчженых и несамо-сапряженных Дифференциалbных уравнений, УМН, 15：3(1960), 3.

〔2〕Besjes J. G., Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order. J. Math. Appl., 49(1)(1975), 24—26.

〔3〕江福汝、高汝熹，高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动，复旦学报(自然科学版)，3(1979)，35.

〔4〕郑永树，高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动（Ⅰ），福建师大学报(自然科学版)，1(1980)，9.

〔5〕郑永树，高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动（Ⅱ），应用数学和力学，2(5)(1981)，563.

〔6〕郑永树、倪守平，高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动(Ⅲ)，华侨大学学报学，2(1982)，1.

〔7〕林宗池，方程带两个参数的高阶椭圆型方程的一般边值问题的奇摄动，应用数学和力学，3(5)(1982)，641.

〔8〕Lions J. L. ard Magenes E., Non-Homogneous Boundary Value Problem and Applications, Springr-Verlay, New York, Hedeberg Berlin (1972).