力学规律的不变性与力学量测量的相对性

——从力学相对性原理谈起

杜 成 金

（物 理 系）

一、问 题 的 提 出

力学相对性原理是爱恩斯坦推广为相对性原理的基础。一般力学教材中对此的论述都比较简单，致使学生理解起来感到困难，甚至觉得疑团莫释。尤其是：（1）发生于某一惯性系的一个事件(或力学过程)在该惯性系和相对该惯性系作匀速直线运动的惯性系看来，是否服从同一力学规律？如果不是，这与力学相对性原理有无矛盾？（2）在什么条件下，发生于某一惯性系的事件，在两个惯性系看来，才会服从同一力学规律？为说明这些问题，对力学规律的不变性做进一步阐述，以及由此涉及到的力学量测量的相对性问题做些较为深入的和一般性的讨论，将是必要的。此外，在经典力学中，让学生对参照系及相对性的概念有较多的接触(目前，在国外的一些教材中，已有所体现和强调)，也是十分有益的。本文拟就此问题做些阐述，並请教于同行。

我们的讨论将仅限于伽利略时空变换及两个惯性系中进行，设一个静系 S 和一个动系 S'。S' 以 $\vec{V}$ 相对于 S 沿 x 方向做匀速直线运动，並用带撇的符号表示在 S' 系中观测的量。

二、力学规律的不变性

一般教材中对力学相对性原理都列举一种或多种不同的表述。诸如：

表述一：“在一切惯性系中，力学定律的形式是相同的”。(即力学规律具有不变性)

表述二：“从力学观点来看，一切惯性系都是等价的”。

表述三：“任何两个相互作匀速直线运动的参照系中的观察者，对同一力学过程（或事件）所作的观察是没有区别的，不能说哪个惯性系在运动，哪个惯性系在静止”。

如此等等，各种表述无疑都是正确的，等效的，中心是说明：一切惯性系中，力学规律具有不变性。但是，有的表述不甚具体和明确，未作更多解释乃至定量的讨论，往往使学生产生诸多误解和混乱，例如表述三，学生往往提出：“同一力学过程(或事件)”是在哪一个惯性系中发生呢？观察的结果又何指呢？确实比较费解。比如，拔河比赛不管发生于何系，在 S 系看来是甲胜乙负，在 S' 系看来也必定是甲胜乙负，是“没有区别的”。但甲、乙两人赛

跑，若在S系进行，该系观测$\vec{V}_甲=10\vec{i}$（单位为米/秒，余同）$\vec{V}_乙=5\vec{i}$观察结果是两人同向，且$\vec{V}_甲-\vec{V}_乙=5\vec{i}$；假设$\vec{V}=7\vec{i}$，则在$S'$系观察，$\vec{V'}_甲=3\vec{i}$，$\vec{V'}_乙=-2\vec{i}$，观察结果是两人反向，而$\vec{V'}_甲-\vec{V'}_乙=5\vec{i}$。这里，若指观察两人是否同方向，则结果不同，这不是“区别”吗？若指观察两人速度差，则结果相同，“没有区别”。

有鉴于此，我们认为，不管采用何种表述，适当加以强调和说明是必要的：

（一）所谓“力学规律的不变性”，系指一事件P在S系发生，在S系观察与同一事件P在S'系发生，在S'系观察，当物理量采用同样方法定义时，力学规律的表述及其数学表达都具有相同的形式，即两系观测结果相同；而不是指在某一惯性系发生的事件，在不同惯性系看来都一样，都服从同一规律。

伽利略实验的原意正是指：当事件P发生于静止的船仓内，在静止的船仓内观察与事件P发生于匀速直线前进的船仓内，在该船仓内观察结果相同。这种力学规律的不变性可做如下定量说明：

根据伽利略变换，很容易导出

$$\vec{a}=\vec{a'} \tag{1}$$

由此出发，我们不难导出S系和S'系中牛顿第二定律、动量守恒定律、动能定理及机械能守恒定律等都具有相同的形式。

在经典力学中，质量m被认为是绝对的常数，将（1）式两边同乘m，即$m\vec{a}=m\vec{a'}$。实验表明，物体相互作用的力对参照系S和S'完全相同，即$\vec{F}=\vec{F'}$因而有

$$\vec{F}=m\vec{a} \text{ 与 } \vec{F'}=m\vec{a'} \tag{2}$$

若定义加速度为速度对时间的一阶导数，动量为质量与速度的乘积，则有

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt} \text{ 与 } \vec{F'}=m\frac{d\vec{v'}}{dt}=\frac{d\vec{p'}}{dt} \tag{3}$$

当无外力作用时，方程（3）的一次积分得

$$\vec{p}=\vec{c} \text{ 与 } \vec{p'}=\vec{c'} \tag{4}$$

将方程（3）和路线间的标量积进行积分得

$$\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int m\,d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\int_{v_0}^{v}m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=E_k-E_{k0}$$

与 $$\int\vec{F'}\cdot d\vec{r'}=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv_0'^2=E_k'-E_{k0}' \tag{5}$$

假如外力都是保守力，则（5）式左端积分与路径无关，等于位势的下降，即得

$$-(E_p-E_{p0})=E_k-E_{k0} \quad 即 \quad E_p+E_k=E_{p0}+E_{k0}$$

与 $$-(E_p'-E_{p0}')=E_k'-E_{k0}' \quad 即 \quad E_p'+E_k'=E_{p0}'+E_{k0}' \tag{6}$$

方程(2)至(6)就是力学定律形式的不变性。

既然，力学规律在S和S'系形式不变，受这些规律制约的一切力学过程在S系发生，在S系观察与在S'系发生，在S'系观察，其结果必然是相同的。但是，这並不意味着同一运动(或事件)在某一惯性系发生，在S和S'系同时观察的结果都一样，都服从相同的规律。

例如，图1所示装置，x表示某一状态下弹簧的相对伸长，若取弹簧和物体为系统，则在S系看来，运动过程中，外力不做功，$A_{外}=0, A_{耗}=0$，系统机械能守恒，

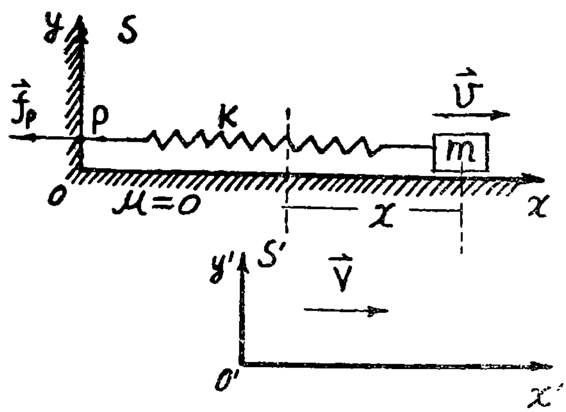

图 1

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\text{恒量} \quad (7)$$

但是，由于势能决定于物体的相对位置，与参照系无关，在S'系看来，系统的机械能为

$$E'=\frac{1}{2}kx'^2+\frac{1}{2}mv'^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2-mv\mathrm{v}$$
$$=E+\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2-mv\mathrm{v} \quad (8)$$

虽然，对不同状态v值不同（除非$v=\frac{1}{2}\mathrm{v}$），E'并不守恒(暂不细究其原因，留待下节讨论)。

(二)所谓“一切惯性系都是等价的”，系指如某一事件P在S系发生，观测结果为L_0，在S'系观察结果为L；如果同一事件P在S'系发生，观察结果为L_0，在S系观察结果必为L。但並不意味着L_0一定等于L，也就是说，“等价”並不是“等同”，这里必须从对易性来理解。

例如，在图1的例子中，若系统运动这一事件发生于S'（即弹簧系于S'系），在该系观测机械能也一定守恒，而在S系看来，机械能一定不守恒。

又如，在匀速直线前进的车厢里自由下落的物体，在S'系看来是直线运动，在地面S系看来是抛物运动；若自由下落这一事件发生于地面上，则在S系看来是直线运动，在S'系看来必为抛物运动。总之，正是从对易角度上说，S和S'系等价。

(三)所谓“相对性”，系指发于某惯性系中一事件(包括物理量测量)在不同惯性系中同时观测的结果一般是不同的，因而事件的描述(包括物理量的量值)具有相对的意义，必须指明哪一个惯性系而言。

其所以说“等价”，而不说“等同”，皆因某些物理量对不同的惯性系来说具有相对性的缘故。但是，考虑了物理量的相对性问题，又很容易导出“一切惯性系都是等价”的结果。

在图1中，为什么在S系看来机械能守恒，而在S'系看来，机械能不守恒呢？就是因为在两个系中同时观测的外力之功量值不同：在S系看来，弹簧与墙的连结点P是固定不动的，外界通过P点虽有作用力$\vec{f}_p$，但不做功；而在S'系看来，P点在$\vec{f}_p$作用下，有向左的位移而做了功，即外力之功是相对的（见下节讨论）。

三、力学量测量的相对性

上面，我们已引用了功、能相对性的概念，因此有必要做些深入的和尽可能一般性的讨论。

研究功能与参照系的关系，即相对性问题是不能一概而论的。我们不能不加条件、不加分析地泛谈功能的相对性。具体地说，研究做功时，必须区分外力之功还是内力之功；讨论能量时，必须区分是测量（假定测量是可能的）它们的绝对量还是它们的改变量。而这一切又往往与系统的性质（如系统孤立与否）紧密相关。当然，系统孤立与否也是相对的。所谓孤立系统，系指与外界没有相互作用的系统；反之，则为非孤立系统。

（一）作功与参照系的关系

外力之功是相对的，与参照系有关。

为不失一般性，我们考察一个由 n 个质点组成的系统。设作用于第 i 个质点上的外力为 $\vec{F}_i^{(e)}$，内力为 $\vec{F}_i^{(i)}$，质点发生的位移在 S 和 S' 系中分别为 $d\vec{r}_i$ 和 $d\vec{r}\,'$，则外力对系统作功的总和分别为

$$A_{外}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i$$

$$A'_{外}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i{}'=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot(d\vec{r}_i-\vec{V}dt)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i-\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot\vec{V}dt$$

显然，一般情况下（除非 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\perp\vec{V}$）

$$A_{外}\neq A'_{外} \tag{9}$$

即不同惯性系测得同一力作功的量值是不同的。图1中，$\vec{f}_p$是外力，$\vec{f}_o\cdot\vec{V}\neq 0$，因而两系中观察其功的量值不同，便是一例。

内力之功的总和是绝对的，与参照系无关。

为简单计，先看系统内任意两个质点 m_1、m_2 之间的相互作用内力之功。设两质点相对 s 和 s' 系的位置分别用 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、和 $\vec{r}_1{}'$、$\vec{r}_2{}'$ 表示（如图2），它们在两系中的相对位置分别定义为 $\vec{r}_{12}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_{12}{}'=\vec{r}_2{}'-\vec{r}_1{}'$，由伽利略变换可得 $d\vec{r}_{12}=d\vec{r}_{12}{}'$。设 $\vec{f}_{12}$ 和 $\vec{f}_{21}$ 为它们之间的一对相互作用内力，因为 $\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}$，所以这一对内力对系统作功在 s 和 s' 看来分别为

$$dA=\vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2=\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_{12}$$

$$dA'=\vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1{}'+\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2{}'=\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_{12}{}'$$

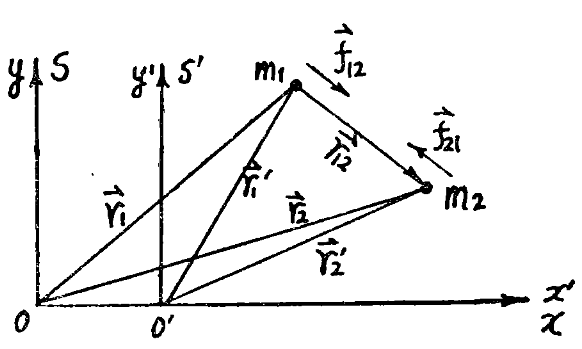

图 2→

从而得出

$$dA = dA'$$

推广到n对内力，即得

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} \cdot d\vec{r}_i{}' \text{或} A_{内} = A'_{内} \qquad (10)$$

可见内力之功的总和$A_{内}$是绝对的，与参照系无关，而且这一结论对保守内力与非保守内力皆成立。这是不乏其例的，功总是与能量的传递或转换过程相联系的。例如，发射炮弹时的化学能，一对内摩擦力做功产生的热能等等，当然是与参照系无关的。

（二）势能与参照系的关系

当力$\vec{F}$只是位矢$\vec{r}$（即坐标x, y, z）的单值函数时，质点从位置1移到位置2，其功为

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (11)$$

当$\vec{F}$为保守力时，这一线积分与路径无关，因而在力场中必定存在一个位置函数$E_p(x, y, z)$，且有$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$，$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$，$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$，从而得出

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz\right) = -\int_{(1)}^{(2)} dE_p$$

$$= -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = -\triangle E_p \qquad (12)$$

即保守力作功等于质点的某位置函数的减少值。其中：位置函数$E_p(x, y, z)$称为质点在该力场中的势能；$\triangle E_p = E_{p2} - E_{p1}$称为势能的改变量（即点1与点2的势能差）。

从以上定义过程不难看出：势能的绝对量$E_p(x, y, z)$本身并未确切地定义，（12）式所确切定义的仅是势能的改变量。将势力场中各处的势能普遍加或减同一个常数，势能差保持不变，（12）式仍成立。这个任意常数在某种意义上说，可认为是积分（11）的积分常数，在不同参照系（坐标系）中不同。因而有

$$E_p(x, y, z) = E'_p(x, y, z) + C \qquad (13)$$

即势能的绝对量是相对的，与参照系有关。

但是，势能的绝对量並没有实际意义，只有势能的改变量才有实际意义。因而，我们关心的是改变量的相对性问题。通常，我们所讲的质点具有多大势能，都是相对一定参考位置而言的，实质上是势能的改变量。将（13）式两边微分，即得

$$dE_p = dE_p{}' \qquad (14)$$

即势能的改变量是绝对的。事实上，这一结论也可从图2所示系统获得证明。由于$dA = dA'$；又$dA = -dE_p$，$dA = -dE_p{}'$，因而，同样可得（14）式的结论。

（三）动能与参照系的关系

动能的绝对量是相对的，与参照系有关。

设有n个质点组成的系统。我们不妨以S系和质心参照系S_c来观测系统在某一时刻的动能，即以S_c系代替上面的S'系，这並不影响结果的普遍性。以$\vec{r}_c$表示质心C相对S系的位置，以

$\vec{r}_i$和$\vec{r}_i'$表示第i个质点相对S和S_c系的位置（如图3）。在S系看来，某一时刻系统的动能为

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i$$

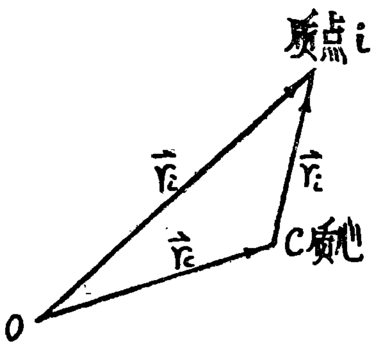

图　3

因为$\vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}_i'$，　$\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i'$，所以

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_c+\vec{v}_i')\cdot(\vec{v}_c+\vec{v}_i')$$

$$=\frac{1}{2}\vec{v}_c\cdot\vec{v}_c\sum_{i=1}^{n}m_i+\vec{v}_c\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i'+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_i'$$

$$=\frac{1}{2}m_o\vec{v}_c\cdot\vec{v}_c+\vec{v}_c\cdot m_o\vec{v}_c'+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_i'$$

这里，$m_o=\sum_{i=1}^{n}m_i$为系统总质量；由质心定义$\vec{r}_c=\sum m_i\vec{r}_i/\sum m_i$及相对性概念得出$\vec{v}_c'$为质心相对质心的速度，显然$\vec{v}_c'=0$，于是

$$E_k=\frac{1}{2}m_ov_c^2+\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i'^2$$

上式右方第一项为S系测得系统质心的动能E_{ck}，第二项为系统相对于质心系S_c的动能E_{ck}'，从而

$$E_k=E_{ck}+E_{ck}' \tag{15}$$

可见在一般情况下，$E_{ck}\neq0$，则

$$E_k\neq E_{ck}' \tag{16}$$

即动能的绝对量是相对的。无论系统是否孤立，（16）式都成立。因为外力只影响质心加速度，从而影响E_{ck}，但不能改变动能的相对性。

动能的改变量的相对性问题，实质就是作功的相对性问题的必然推论：

由质点系动能定理，在S和S'系分别有

$$\sum_i\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i+\sum_i\vec{F}_i^{(i)}\cdot d\vec{r}_i=dE_k\text{及}\sum_i\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i'+\sum_i\vec{F}_i^{(i)}\cdot d\vec{r}_i'=dE_k'$$

根据（10）式，因而有

$$dE_k-dE_k'=\sum_i\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i-\sum_i\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i'$$

$$=\sum_i\vec{F}_i^{(e)}\cdot\left(d\vec{r}_i-d\vec{r}_i'\right)=\sum_i\vec{F}_i^{(e)}\cdot\vec{V}dt$$

$$= \sum_i \vec{F}_i^{(e)} dt \cdot \vec{V}$$

其中：$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} dt$是外力的冲量，应等于系统动量的改变，即 $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot dt = \sum \vec{P}_i - \sum_i \vec{P}_o$

从而 $dE_k - dE_k' = (\sum_i \vec{P}_i - \sum_i \vec{P}_o) \cdot \vec{V}$

对孤立系统来说，因 $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = 0$，动量守恒，故

$$dE_k = dE_k'$$

即孤立系统动能的改变量是绝对的；对非孤立系统来说，因 $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \neq 0$，动量不守恒，故

$$dE_k \neq dE_k'$$

即非孤立系统动能的改变量是相对的。

由上讨论可知：我们不能笼统地泛谈功能的相对性，必须区分内力之功与外力之功，区分能量的绝对量还是改变量；同时，要与系统性质相联系。正是由于力学量的这种相对性质的存在，才会产生、也才能解释力学相对性原理中那些“节外生枝”的附带说明。

四、结　　论

综上所述，不难得出以下结论：

（1）同一事件（或力学过程）发生于某一惯性系（如S'系），在S系和S'系同时观测，一般说来，这一事件服从不同的力学定律，其原因在于所取的系统是非孤立系统，而外力之功及动能的改变量是相对的，即与参照系有关的缘故。

（2）系统边界的的选取是人为的、相对的。如果我们选取上述系统及其外界构成一个新的系统，即有可能使之成为孤立系统。对孤立系统来说，内力之功的总和及动能的改变量都是绝对的，与参照系无关。从而可得出一切孤立系统内发生的力学过程，都服从同一力学规律，即力学规律具有不变性。