关于Hirota形式的非线性演化方程的Bäcklund变换与Scale变换的关系

黄　迅　成

（上海计算技术研究所）

摘　　要

探讨不同参数的Bäcklund变换之间的关系是一项很重要的工作，本文在Hirota双线性形式下讨论这方面的关系。文中建立了双线性形式第二修改的Korteweg-de Vries方程和Kadomtsev-Petviashvili方程的Bäcklund变换与Scale变换的关系，得到了相应的$B_k=S^{-1}(k)BS(k)$型分解等式。本文的讨论可推广到在Scale变换下形式不变的一大类Hirota双线性形式的非线性演化方程。

Bäcklund 变换在非线性演化方程的研究中起着重要作用。文〔1〕指出，由方程的*Bäcklund*变换求方程的守恒律，非线性迭加公式以及孤立子解往往要用到该变换所含的任意参数，因此，探讨不同参数的*Bäcklund*变换之间的关系是很必要的。这个工作往往又同方程的不变变换密切相关，使两种变换之间成立$B_k=S^{-1}(k)BS(k)$型等式。关于通常形式下，这方面已有不少工作[2—8]，然而，在*Hirota*的双线性形式下讨论这些关系，文献中尚不多见。本文建立了双线性形式第二修改的*Korteweg-de Vries*方程和*Kadomtsev-Petviashvili*方程的双线性*Bäcklund*变换与*Scale*变换的关系，得到了相应的变换等式。本文的讨论可推广到在*Scale*变换下形式不变的一大类*Hirota*双线性形式的非线性演化方程。

一

第二修改的*Korteweg-de Vries*方程为

$$U_t+\frac{1}{2}(U_x)^3+U_{xxx}+6\alpha^2U_xSin^2U=0 \tag{1}$$

其中α是任意常数，当$\alpha=0$时，得常见的修改*Korteweg-de Vries*方程。这些方程在非调和晶格，等离子体物理等许多领域有重要应用。

作代换

$$U=i\ log\left(f_1{}'f_2{}'/f_1f_2\right),\ i=\sqrt{-1} \tag{2}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

方程（1）可以化为一组 Hirota 双线性形式方程：

$$(D_t+D_x^3)f_j'\cdot f_j=0 \quad (j=1,\ 2), \tag{3a}$$

$$D_x^2 f_j'\cdot f_j=0 \quad (j=1,2), \tag{3b}$$

$$(D_x+\alpha)f_1\cdot f_2-\alpha f_1'f_2'=0, \tag{3c}$$

$$(D_x+\alpha)f_1'\cdot f_2'-\alpha f_1 f_2=0, \tag{3d}$$

其中 Hirota 双线性算子 D_t，D_x 定义为：

$$D_t^n D_x^m a(x,\ t)\cdot b(x,\ t) \equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m a(x,\ t)b(x',\ t')\Big|_{x=x',\ t=t'}. \tag{4}$$

据文[10]，方程（3）的一个 Bäcklund 变换为

$$B_{kr}:\ \left(D_t+D_x^3+\frac{3}{4}k^2D_x\right)f_j^{(1)}\cdot g_j^{(1)}=0 \quad (j=1,\ 2), \tag{5a}$$

$$\left(D_x^2-k^2/4\right)f_j^{(1)}\cdot g_j^{(1)}=0 \quad (j=1,\ 2), \tag{5b}$$

$$D_x f_j'\cdot g_j=\frac{1}{2}ikf_j g_j'(-1)^j \quad (j=1,\ 2), \tag{5c}$$

$$D_x f_j\cdot g_j'=\frac{1}{2}ikf_j'g_j(-1)^{j+1} \quad (j=1,\ 2), \tag{5d}$$

$$\frac{1}{2}ikf_2g_1-\alpha f_2'g_1'=rf_1g_2, \tag{5e}$$

$$-\frac{1}{2}ikf_2'g_1'-\alpha f_2g_1=rf_1'g_2', \tag{5f}$$

其中 f_1'，f_2'，f_1，f_2 和 g_1'，g_2'，g_1，g_2 为方程（3）的两组解，k，r 为任意参数，$\square f_j^{(1)}\cdot g_j^{(1)}=0$ 表示两组独立的方程 $\square f_j\cdot g_j=0$ 和 $\square f_j'\cdot g_j'=0\ (j=1,\ 2)$。

定义一、Scale 变换 $S_1(\lambda)$ 定义为

$$x\to\tilde{x}=\lambda x,$$
$$t\to\tilde{t}=\lambda^3 t,$$
$$\alpha\to\tilde{\alpha}=\lambda^{-1}\alpha. \tag{6}$$

易证，方程（3）在变换 $S_1(\lambda)$ 下不变。我们有

定理一、对第二修改的 Korteweg-de Vries 方程（3）来说，其 Bäcklund 变换与 Scale 变换有次之关系

$$B_{kr}=S_1^{-1}(\lambda)B_{(k/\lambda)(r/\lambda)}S_1(\lambda), \tag{7}$$

特别地，

$$B_{kr}=S_1^{-1}(k)B_{1(r/k)}S_1(k), \tag{8}$$

其中 $B_{(k/\lambda)(r/\lambda)}$ 和 $B_{1(r/k)}$ 为参数分别取 k/λ，r/λ 和 1，r/k 的变换（5）；

若取 $r=0$，仅考虑（5）的单个参数，记变换 B_{k0} 为 B_k，有

$$B_k=S_1^{-1}(k)B_1S_1(k)。 \tag{9}$$

证明　设 $f'_{(\nu)1}$，$f_{(\nu)}{}'_2$，$f_{(\nu)1}$，$f_{(\nu)2}$（$\nu=0,\ 1$）为方程（3）的两组解，$\nu=1$ 这组解为 $\nu=0$ 的解实施 Bäcklund 变换（5）的结果，形式地记为

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(1)1} \\ f'_{(1)2} \\ f_{(1)1} \\ f_{(1)2} \end{pmatrix} = B_{kr} \begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(0)1} \\ f'_{(0)2} \\ f_{(0)1} \\ f_{(0)2} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

对解 $f'_{(\nu)1}$，$f'_{(\nu)2}$，$f_{(\nu)1}$，$f_{(\nu)2}$ 实施 *Scale* 变换 $S_1(\lambda)$，形式地记为

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \\ \tilde{f}'_{(\nu)1} \\ \tilde{f}'_{(\nu)2} \\ \tilde{f}_{(\nu)1} \\ \tilde{f}_{(\nu)2} \end{pmatrix} = S_1(\lambda) \begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(\nu)1} \\ f'_{(\nu)2} \\ f_{(\nu)1} \\ f_{(\nu)2} \end{pmatrix}, \qquad (\nu = 0,\ 1). \tag{11}$$

将（11）式及其相应的算子变换代入（10），经过整理我们可得

$$\left[\tilde{D}_t + \tilde{D}_x^3 + \frac{3}{4}(k/\lambda)^2 \tilde{D}_x\right] \tilde{f}^{(1)}_{(0)j} \cdot \tilde{f}^{(1)}_{(1)j} = 0 \quad (j = 1,\ 2), \tag{12a}$$

$$\left[\tilde{D}_x^2 - (k/\lambda)^2/4\right] \tilde{f}^{(1)}_{(0)j} \cdot \tilde{f}^{(1)}_{(1)j} = 0 \quad (j = 1,\ 2), \tag{12b}$$

$$\tilde{D}_x \tilde{f}'_{(0)j} \cdot \tilde{f}_{(1)j} = \frac{1}{2} i (k/\lambda) \tilde{f}_{(0)j} \tilde{f}'_{(1)j} (-1)^j \quad (j = 1,\ 2), \tag{12c}$$

$$\tilde{D}_x \tilde{f}_{(0)j} \cdot \tilde{f}'_{(1)j} = \frac{1}{2} i (k/\lambda) \tilde{f}'_{(0)j} \tilde{f}_{(1)j} (-1)^{j+1} \quad (j = 1,\ 2), \tag{12d}$$

$$\frac{1}{2} i (k/\lambda) \tilde{f}_{(0)2} \tilde{f}_{(1)1} - \tilde{\alpha} \tilde{f}'_{(0)2} \tilde{f}'_{(1)1} = (r/\lambda) \tilde{f}_{(0)1} \tilde{f}_{(1)2}, \tag{12e}$$

$$-\frac{1}{2} i (k/\lambda) \tilde{f}'_{(0)2} \tilde{f}'_{(1)1} - \tilde{\alpha} \tilde{f}_{(0)2} \tilde{f}_{(1)1} = (r/\lambda) \tilde{f}'_{(0)1} \tilde{f}'_{(1)2}, \tag{12f}$$

其中 $\tilde{\Box} \tilde{f}^{(1)}_{(0)j} \cdot \tilde{f}^{(1)}_{(1)j} = 0$ 表示二组独立的方程 $\tilde{\Box} \tilde{f}_{(0)j} \cdot \tilde{f}_{(1)j} = 0$ 和 $\tilde{\Box} \tilde{f}'_{(0)j} \cdot \tilde{f}'_{(1)j} = 0$（$j = 1,\ 2$）。

此即

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \\ \tilde{f}'_{(1)1} \\ \tilde{f}'_{(1)2} \\ \tilde{f}_{(1)1} \\ \tilde{f}_{(1)2} \end{pmatrix} = B_{(k/\lambda),(r/\lambda)} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \\ \tilde{f}'_{(0)1} \\ \tilde{f}'_{(0)2} \\ \tilde{f}_{(0)1} \\ \tilde{f}_{(0)2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将（11）代入（13）有

$$S_1(\lambda)\begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(1)1} \\ f'_{(1)2} \\ f_{(1)1} \\ f_{(1)2} \end{pmatrix} = B_{(k/\lambda)(r/\lambda)} S_1(\lambda)\begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(0)1} \\ f'_{(0)2} \\ f_{(0)1} \\ f_{(0)2} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

将（10）代入（14），可得

$$S_1(\lambda) B_{kr}\begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(0)1} \\ f'_{(0)2} \\ f_{(0)1} \\ f_{(0)2} \end{pmatrix} = B_{(k/\lambda)(r/\lambda)} S_1(\lambda)\begin{pmatrix} x \\ t \\ f'_{(0)1} \\ f'_{(0)2} \\ f_{(0)1} \\ f_{(0)2} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

从而 $$B_{kr} = S^{-1}{}_1(\lambda) B_{(k/\lambda)(r/\lambda)} S_1(\lambda)$$

结论（7）已证；由（7）易得（8），（9）， 定理一证完。

注意到 B_{kr} 的逆变换 $B^{-1}{}_{kr} = B_{(-k)(-r)}$，可得

推论 $$B^{-1}{}_{kr} = S_1(-1) B_{kr} S_1(-1), \tag{16}$$

其中 $S_1(-1)$是离散的 Scale 变换（6），它将变换群（6）中集合 $S_1^+(\lambda>0)$中的元映射到集合 $S_1^-(\lambda<0)$上，反之亦然。

二

Kadomtsev-Petviashvili 方程

$$U_{tx} + 3(U^2)_{xx} + U_{xxxx} + \beta U_{yy} = 0 \ (\beta: const.) \tag{17}$$

是一个重要的二维非线性演化方程，它对于弱色散和弱非线性介质中的扰动是一极好的数学描述。而且在 xt 平面上它可归结为著名的 Korteweg-de Vries 方程，在 xy 平面上可归结为 Boussinesq 方程，这二个方程在物理和工程中都有广泛应用。

考虑在 $|x|\to\infty$，$U\to -2/x^2$ 边界条件的情况，作代换

$$U = 2[\log xf(t,\ x,\ y)]_{xx}, \tag{18}$$

可以化成 Hirota 形式

$$\left(D_xD_t + D_x^4 + \beta D_y^2 - \frac{12}{x^2} D_x^2\right) f\cdot f = 0, \tag{19}$$

它的一个双线性形式的 Bäcklund 变换为：〔11〕

$$B_k\colon \left(D_t + 3k^2 D_x + D_x^3 + 3bD_xD_y - \frac{6}{x^2} D_x\right) f'\cdot f = 0. \tag{20a}$$

$$\left(D_x^2 - bD_y - \frac{2}{x^2}\right) f'\cdot f = k^2 f' f \tag{20b}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 f'，f 为方程（19）的两个解，$b=\sqrt{\beta/3}$，k 为任意参数。

定义二、*Scale* 变换 $S_2(\lambda)$ 定义为

$$x \to \tilde{x} = \lambda x,$$
$$y \to \tilde{y} = \lambda^2 y,$$
$$t \to \tilde{t} = \lambda^3 t. \qquad (21)$$

可以证明，方程（19）在变换 $S_2(\lambda)$ 下不变。我们证明了

定理二、对方程（19）其 *Bäcklund* 变换同与 *Scale* 变换有次之关系：

$$B_k = S^{-1}{}_2(\lambda) B_{k/\lambda} S_2(\lambda) \qquad (22)$$

以及

$$B_k = S^{-1}{}_2(k) B_1 S_2(k), \qquad (23)$$

其中 $B_k/_\lambda$，B_1 分别为参数取 k/λ 和 1 的 *Bäcklund* 变换（20）。

对于定理二有与定理一相仿的推论。

三

从上面两个方程的结果，我们可以看到在 *Hirota* 双线性形式下，讨论非线性演化方程的不同参数的 *Bäcklund* 变换之间的关系，所用的不变变换往往只涉及自变量本身的变换，形式简单，一目了然。显然，这为我们深入研究 *Bäcklund* 变换的结构提供了有力工具。

同样的讨论可推广到一般非线性演化方程

$$F(D_t,\ D_x) f\cdot f = 0, \qquad (24)$$

其中 $F(\xi,\ \eta)$ 为多项式，并满足 $F(\xi,\ \eta)=F(-\xi,\ -\eta)$ 及 $F(0,\ 0)=0$；例如当 $F(\xi,\ \eta)=\eta(\xi-\eta^3)$ 时，方程（24）为双线性 *Korteweg-de Vries* 方程

$$D_x(D_t+D_x{}^3) f\cdot f = 0 \cdot \qquad (25)$$

显而易见，方程（24）的最原始形式的 *Bäcklund* 变换为

$$[F(D_t,\ D_x) f'\cdot f'] ff - f'f'[F(D_t,\ D_x) f\cdot f] = 0, \qquad (26)$$

如果 f 是方程（24）的解，则 f' 必为（24）的又一解，反之亦然。通过适当变形，可以将（26）转换为通常的 *Hirota* 形式的 *Bäcklund* 变换

$$G_a(D_t,\ D_x) f'\cdot f = 0, \qquad (27a)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_r(D_t,\ D_x) f'\cdot f = 0, \qquad (27r)$$

或其它等价的形式。

从方程（26）到（27）转换的主要数学依据是公式

$$\exp(D_1)[\exp(D_2)a\cdot b]\cdot[\exp(D_3)c\cdot d]$$
$$\equiv \exp\left[\frac{1}{2}(D_2-D_3)\right]\left\{\exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)+D_1\right]a\cdot d\right\}\cdot\left\{\exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)-D_1\right]c\cdot b\right\}, \qquad (28)$$

其中 $D_j=\varepsilon_j D_x+\delta_j D_t$，$\varepsilon_j$，$\delta_j$ 为常数，$j=1,\ 2,\ 3$.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

公式（28）的证明並不难，事实上

由双线性算子 D_t，D_x 的定义，易证恒等式

$$exp(\varepsilon D_x)a(x)\cdot b(x)\equiv a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon), \tag{29}$$

从而

$$exp(D_2)a\cdot b=exp(\varepsilon_2 D_x+\delta_2 D_t)a\cdot b$$
$$=a(x+\varepsilon_2,\ t+\delta_2)b(x-\varepsilon_2,\ t-\delta_2), \tag{30}$$

和

$$exp(D_3)c\cdot d=c(x+\varepsilon_3,\ t+\delta_3)d(x-\varepsilon_3,\ t-\delta_3). \tag{31}$$

于是

$$exp(D_1)[exp(D_2)a\cdot b]\cdot[exp(D_3)c\cdot d]$$
$$=a(x+\varepsilon_2+\varepsilon_1,\ t+\delta_2+\delta_1)b(x-\varepsilon_2+\varepsilon_1,\ t-\delta_2+\delta_1)c(x+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ t+\delta_3-\delta_1)d(x-\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ t-\delta_3-\delta_1). \tag{32}$$

同样可得

$$exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)+D_1\right]a\cdot d$$
$$=a\left(x+\frac{1}{2}\varepsilon_2+\frac{1}{2}\varepsilon_3+\varepsilon_1, t+\frac{1}{2}\delta_2+\frac{1}{2}\delta_3+\delta_1\right)d\left(x-\frac{1}{2}\varepsilon_2-\frac{1}{2}\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ t-\frac{1}{2}\delta_2-\frac{1}{2}\delta_3-\delta_1,\right) \tag{33}$$

和

$$exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)-D_1\right]c\cdot b$$
$$=c\left(x+\frac{1}{2}\varepsilon_2+\frac{1}{2}\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ t+\frac{1}{2}\delta_2+\frac{1}{2}\delta_3-\delta_1\right)$$
$$b\left(x-\frac{1}{2}\varepsilon_2-\frac{1}{2}\varepsilon_3+\varepsilon_1, t-\frac{1}{2}\delta_2-\frac{1}{2}\delta_3+\delta_1\right). \tag{34}$$

于是

$$exp\left[\frac{1}{2}(D_2-D_3)\right]\left\{exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)+D_1\right]a\cdot d\right\}\cdot\left\{exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)-D_1\right]c\cdot b\right\}$$
$$=a(x+\varepsilon_2+\varepsilon_1,\ t+\delta_2+\delta_1)d(x-\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ t-\delta_3-\delta_1)$$
$$c(x+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ t+\delta_3-\delta_1)b(x-\varepsilon_2+\varepsilon_1,\ t-\delta_2+\delta_1). \tag{35}$$

由（32）和（35），可知公式（28）成立。

将（28）按 ε_1，ε_2，ε_3，δ_1，δ_2，δ_3 展成幂级数，比较同次幂的系数，可得一系列恒等式，例如

$$(D^2{}_x a\cdot b)cd-ab(D^2{}_x c\cdot d)=D_x[(D_x a\cdot d)\cdot cb+ad\cdot(D_x c\cdot b)], \tag{36}$$
$$(D_xD_t f'\cdot f')ff-f'f'(D_xD_t f\cdot f)=2D_x(D_t f'\cdot f)\cdot ff', \tag{37}$$
$$(D_x{}^2 f'\cdot f')ff-f'f'(D_x{}^2 f\cdot f)=2D_x(D_x f'\cdot f)\cdot ff', \tag{38}$$
$$(D_x{}^4 f'\cdot f')ff-f'f'(D_x{}^4 f\cdot f)=2D_x(D_x{}^3 f'\cdot f)\cdot ff'+6\,D_x(D_x{}^2 f'\cdot f)\cdot(D_x f\cdot f'). \tag{39}$$

正是这些恒等式的转换，可将方程（26）变形为（27），我们可以从文[12]推导方程（25）的 *Bäcklund* 变换的具体过程来熟悉这些思想。

由以上过程，我们可知，如果存在某个 *Scale* 变换 $S(\lambda)$ 使方程（24）保持形式不变，那么该变换必定使（36）—（39）等一系列的恒等式也保持形式不变，从而得到 $B_k=S^{-1}(\lambda)B_{k/\lambda}S(\lambda)$ 型关系式。这样整个工作的关键就化为寻找使方程（24）不变的不变变

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

换，这相对来说就较为容易，这正体现了用 *Hirota* 的双线性形式讨论这些关系的优越性。

鉴于国内中文文献中尚无 *Hirota* 双线性算子方面的介绍，本文在附录中列出双线性算子的主要性质供大家参考。

致谢： 本工作得到中科院计算中心屠规彰教授和上海科大郭本瑜付教授，上海计算所成安生付教授的指导与支持，作者致以深切谢意。

附录—— Hirota 双线性算子的性质

双线性算子 D_t，D_x 定义为

$$D_t^n D_x^m a(x, t)\cdot b(x, t)$$
$$\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m a(x, t)b(x', t')\Big|_{x=x',\ t=t'}.$$

命 $\quad D_z=\delta D_t+\varepsilon D_x,\quad \dfrac{\partial}{\partial z}=\delta\dfrac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x},$

其中 δ 和 ε 为常数。

Hirota 双线性算子的主要性质如下：

（Ⅰ） $D_z^m\ a\cdot 1=\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^m a\cdot$

（Ⅱ） $D_z^m a\cdot b=(-1)^m D_z^m b\cdot a,$

（Ⅱ1） $D_z^m a\cdot a=0$（m 为奇数）.

（Ⅲ） $D_z^m a\cdot b=D_z^{m-1}(a_z\cdot b-a\cdot b_z),$

（Ⅲ1） $D_z^m a\cdot a=2D_z^{m-1}a_z\cdot a$（$m$ 为偶数），

（Ⅲ2） $D_xD_t a\cdot a=2D_x a_t\cdot a=2D_t a_x\cdot a.$

（Ⅳ） $D_x^m exp(p_1x)\cdot exp(p_2x)=(p_1-p_2)^m exp[(p_1+p_2)x].$

设 $F(D_t, D_x)$ 为 D_t 和 D_x 的多项式，我们有

（Ⅳ1） $F(D_t, D_x)exp(\Omega_1t+p_1x)\cdot exp(\Omega_2t+p_2x)$
$=F(\Omega_1-\Omega_2, p_1-p_2)/F(\Omega_1+\Omega_2, p_1+p_2)$
$\times F(D_t, D_x)exp[(\Omega_1+\Omega_2)t+(p_1+p_2)x]\cdot 1.$

（Ⅴ） $exp(\varepsilon D_x)a(x)\cdot b(x)=a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon).$

（Ⅵ） $exp(\varepsilon D_z)ab\cdot cd=[exp(\varepsilon D_z)a\cdot c][exp(\varepsilon D_z)b\cdot d]$
$=[exp(\varepsilon D_z)a\cdot d][exp(\varepsilon D_z)b\cdot c],$

（Ⅵ1） $D_z ab\cdot c=\left(\dfrac{\partial a}{\partial z}\right)bc+a(D_z b\cdot c),$

（Ⅵ2） $D_z^2 ab\cdot c=\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)bc+2\left(\dfrac{\partial a}{\partial z}\right)D_z b\cdot c+a(D_z^2 b\cdot c),$

（Ⅵ3） $D_z^3 ac\cdot bc=(D_z^3 a\cdot b)c^2+3(D_z a\cdot b)D_z^2 c\cdot c,$

（Ⅵ4） $D_x^m exp(px)a\cdot exp(px)b=exp(2px)D_x^m a\cdot b.$

（Ⅶ） $exp(\delta D_t)[exp(\varepsilon D_x)a\cdot b]\cdot[exp(\varepsilon D_x)c\cdot d]$
$=exp(\varepsilon D_x)[exp(\delta D_t)a\cdot c]\cdot[exp(\delta D_t)b\cdot d]$
$=[exp(\delta D_t+\varepsilon D_x)a\cdot d][exp(-\delta D_t+\varepsilon D_x)c\cdot b].$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

下面的公式用于将一般形式的非线性微分方程转换成双线性形式

(Ⅷ) $\exp(\varepsilon\partial/\partial z)[a/b]=[\exp(\varepsilon D_z)a\cdot b]/[\cosh(\varepsilon D_z)b\cdot b]$,

(Ⅷ1) $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{D_z a\cdot b}{b_z}$.

(Ⅷ2) $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{D_z^2 a\cdot b}{b^2}-\left(\frac{a}{b}\right)\frac{D_z^2 a\cdot b}{b^2}$,

(Ⅷ3) $\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{D_z^3 a\cdot b}{b^2}-3\left[\frac{D_z a\cdot b}{b^2}\quad\frac{D_z^2 b\cdot b}{b^2}\right]$.

(Ⅸ) $2\cosh(\varepsilon\partial/\partial z)\log f=\log[\cosh(\varepsilon D_z)f\cdot f]$,

(Ⅸ1) $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\log f=\frac{D_z^2 f\cdot f}{2f^2}$,

(Ⅸ2) $\frac{\partial^4}{\partial z^4}\log f=\frac{D_z^4 f\cdot f}{2f^2}-6\left[\frac{D_z^2 f\cdot f}{2f^2}\right]^2$.

以下公式用于将双线性微分方程转换回通常形式的非线性微分方程

(Ⅹ) $\exp(\varepsilon D_x)a\cdot b=\{\exp[2\cosh(\varepsilon\partial/\partial x)\log b]\}[\exp(\varepsilon\partial/\partial x)(a/b)]$.

设 $\psi=a/b$, $u=2(\log b)_{xx}$, 我们有

(Ⅹ1) $(D_x a\cdot b)/b^2=\psi_x$,

(Ⅹ2) $(D_x^2 a\cdot b)/b^2=\psi_{xx}+u\psi$,

(Ⅹ3) $(D_x^3 a\cdot b)/b^2=\psi_{xxx}+3u\psi_x$,

(Ⅹ4) $(D_x^4 a\cdot b)/b^2=\psi_{xxxx}+6u\psi_{xx}+(u_{xx}+3u^2)\psi$,

(Ⅹ5) $(D_x D_t a\cdot b)/b^2=\psi_{xt}+2\psi(\log b)_{xt}$.

(Ⅺ) $\exp(\varepsilon D_x)a\cdot b=\exp[\sinh(\varepsilon\partial/\partial x)\log(a/b)+\cosh(\varepsilon\partial/\partial x)\log(ab)]$.

设 $\phi=\log(a/b)$ 和 $\rho=\log(ab)$, 我们有

(Ⅺ1) $(D_x a\cdot b)/ab=\phi_x$,

(Ⅺ2) $(D_x^2 a\cdot b)/ab=\rho_{xx}+(\phi_x)^2$,

(Ⅺ3) $(D_x^3 a\cdot b)/ab=\phi_{xxx}+3\phi_x\rho_{xx}+(\phi_x)^3$,

(Ⅺ4) $(D_x^4 a\cdot b)/ab=\rho_{xxxx}+4\phi_x\phi_{xxx}+3(\rho_{xx})^2+6(\phi_x)^2\rho_{xx}+(\phi_x)^4$.

关于双线性算子的其他性质请看文献[12]。

参 考 文 献

[1] 屠规彰，Boussieesq 方程的 Bäcklund 变换与守恒律，应用数学学报，4(1981)，63-68。

[2] Steudel H., A relation connecting scale transformation, Galilean transformation and Bäcklund transformation for the nonlinear Schrödinger equation, Physica D. Nonlinear Phenomena, 1D, (1980), 420-421.

[3] Morris H.C., Bäcklund transformations and symmetries of the Yang equation, J.Math.Phys., 21 (1980), 256-260.

[4] 黄迅成，Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换的分解，自然杂志，5, 4(1982)，313-315

[5] 黄迅成，一些非线性演化方程的 Bäcklund 变换的分解，科学探索学报，3(1982)。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

〔6〕Huag Xuncheng(黄迅成), On the Decompositins of the Bäcklund transformations for the eqations of KdV type, 应用数学与力学, 6(1982).

〔7〕黄迅成, 关于 Liouville 方程和 Wave 方程, Benjamin-Ono 方程的 Bäcklund 变换的分解, 科学通报, 27, 9(1982), 574—575.

〔8〕黄迅成, 一个联系 Euclidean Sinh-Gordon 方程和 Euclidean Sine-Gordon方程的含参数 Bäcklund 变换, 科学通报, 27, 13(1982), 831.

〔9〕黄迅成, 推导非线性演化方程的 Bäcklund 变换的又一途径, 交通大学学报, 3(1982), 35—40.

〔10〕aksmura A., Chain of the Bäcklnd transformatian for the KdV equation, J. Math. Phys., 22, (1981), 1608-1613.

〔11〕Oishi S., The Korteweg-de Vries equation under slowly decreasing boundary condition, J.Phys.Soc.Japan, 48, (1980), 349-350.

〔12〕Hirota R., A New form of Bäcklund transformations and its relation to the inverse scattering problem, Progr.Theor.Phys., 52, (1974), 1498-1512.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net