

Walsh 函数在系统识别中的应用·

陈 玉 宝

(电 子 工 程 系)

摘 要

本文旨在讨论控制系统的 Walsh 函数识别问题。首先我们描述了系统识别的基本概念和最小二乘法估计的准则,接着讨论了单输入单输出(SISO)系统的 Walsh 函数识别方法,它包括了系统参数识别和未知的初始状态方程求解公式。在线性系统的范畴中,我们还讨论了线性定常时滞系统的 Walsh 函数识别,它是基于把非线性系统的函数表征成单值幂规律型的非线性过程,并用线性定常系统将其描述为 Volterra 函数的级数表达形式,于是把识别问题归结为确定积分方程的核问题。

I、引 言

系统识别是现代控制理论的一个极为重要的组成部份,它是随着现代控制理论的发展而形成的一门十分活跃的学科。在系统工程、自动控制、生物系统和宏观经济系统中都有着十分广泛地应用。鉴于系统识别本身的重要性及其新兴而不成熟的特点,故已引起了不同领域的学者共同关注与兴趣,並吸引他们从事深入研究,这就极大地推动着系统识别技术日臻完善。

II、系统识别概况

所谓系统识别^[1],亦即在所观测到的系统输入输出数据基础上,对系统确定一个数学模型,要求该模型尽可能准确地反映出系统的动态特性。也就是确定一个与所测系统的等价性系统。完成这样一个过程通常要包括三大要素:(a)系统的输入、输出数据,(b)数学模型类别,(c)等价性判别的准则。它的基本过程可用图1来刻划。

* 本文曾在中国电子学会八二年信息论学术会上宣读

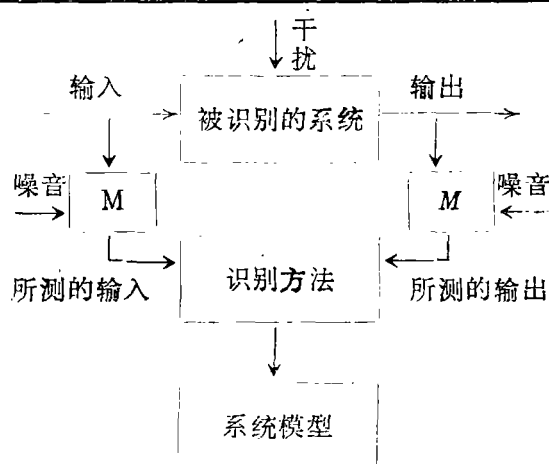


图1 系统识别流程

从图1 中可见,除了输入信号外,尚有一个扰动信号。它是系统识别所必不可少的。如果输入信号是一个不变的常量的话,则系统未曾被扰动所激发,从而无法表现其特性,所以为了进行系统识别,必须加入试验信号亦即图1 中的扰动信号。

在图1 中,我们把观测到的输入输出数据分别记作:

$$X^T = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+N}) \quad (1)$$

$$Y^T = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+N}) \quad (2)$$

它们与相应模型值的误差向量记作:

$$E^T = (e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+N}) \quad (3)$$

在此我们引进最小二乘估计量的准则为:

$$J = \sum_{t=n+1}^{n+N} e_t^2$$

诚然,我们希望 J 达到最小,求出使 J 达到最小值的 θ ,称为 θ 的最小估计,其计算公式:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (4)$$

在最小二乘误差判据极小化的前提下,我们据系统已知的观测值确定某些装置参数和装置结构的最佳估计。因此系统识别问题又可分为结构识别和参数识别。本文旨在讨论用Walsh函数变换来分析计算系统参数识别问题。有关文中所涉及到的Walsh函数性质可参阅[2], [3], 在此一概略去。

III、单输入单输出线性系统的Walsh函数识别

在单输入单输出线性动态系统识别的基本范畴中,所研究的对象不是脉冲响应就是系统参数^[2]。若我们考虑某一定常系统的微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) &= \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) \\ \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) - \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) &= x(t) \quad m < n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $x(t)$ 是系统输入， $y(t)$ 是系统输出， a 、 b 是系统的未知参数。
类似于我们在〔2〕中所讨论的那样，我们依次对方程从0到 t_k 作 n 次连续积分有：

$$\sum_{i=0}^n a_i I_{n-i}^y - \sum_{j=1}^m b_j I_{n-j}^x = I_n^x \quad (6)$$

式中：

$$\begin{aligned} I_{n-i}^y &= \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_k} y(t) dt^{n-i} \\ I_{n-j}^x &= \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_k} x(t) dt^{n-j} \end{aligned}$$

若我们把输入输出函数表示成 k 项的Walsh级数， $k \geq n+m+1$ 有：

$$x(t) = [x_0][W] \quad (7)$$

$$y(t) = [y_0][W] \quad (8)$$

其中：

$$\begin{aligned} [W] &= [\varphi_0(t) \varphi_1(t) \dots \varphi_k(t)]^T = \begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_k(t) \end{bmatrix} \\ [x_0] &= [x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0k}] \\ [y_0] &= [y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0k}] \\ x_{0k} &= \int_0^1 x(t) \varphi_k(t) dt \\ y_{0k} &= \int_0^1 y(t) \varphi_k(t) dt \end{aligned}$$

我们知道，Walsh函数是二值函数，任意项的Walsh函数可分解成正单位阶跃和负单位阶跃函数，从电路的一般特性可知，阶跃函数的积分为上升函数，负阶跃函数的积分为下降函数。故Walsh函数及其对应的积分波形如图2所示。

积分后的波形可以重新用Walsh级数展开来逼近，为了避免混淆，我们把波形逼近的Walsh级数用不同的变量符号加予区别，我们以 $k=7$ 为例将其展开为：

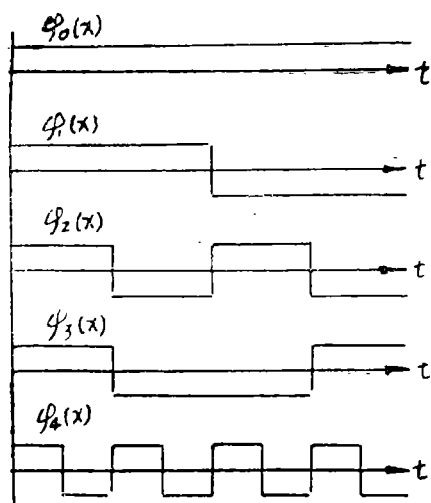
$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_0(x) dx &= \frac{1}{2} \varphi_0(t) - \frac{1}{4} \varphi_1(t) - \frac{1}{8} \varphi_2(t) - \frac{1}{16} \varphi_3(t) \\ \int_0^1 \varphi_1(x) dx &= \frac{1}{4} \varphi_0(t) - \frac{1}{8} \varphi_3(t) - \frac{1}{16} \varphi_6(t) \\ \int_0^1 \varphi_2(x) dx &= \frac{1}{8} \varphi_0(t) - \frac{1}{16} \varphi_6(t) \\ \int_0^1 \varphi_3(x) dx &= \frac{1}{8} \varphi_1(t) - \frac{1}{16} \varphi_7(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \varphi_4(x) dx = \frac{1}{8} \varphi_0(t)$$

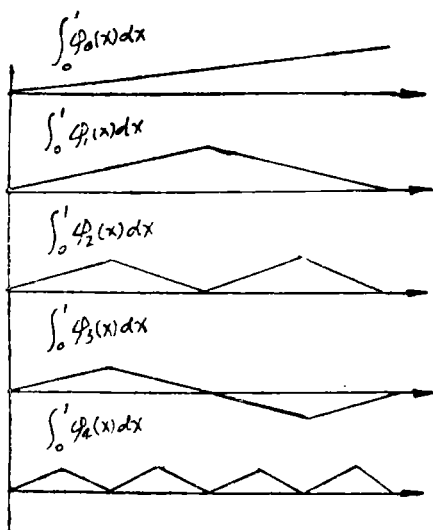
$$\int_0^1 \varphi_6(x) dx = \frac{1}{16} \varphi_1(t)$$

$$\int_0^1 \varphi_8(x) dx = \frac{1}{16} \varphi_1(t)$$

$$\int_0^1 \varphi_7(x) dx = \frac{1}{16} \varphi_3(t)$$



2a Walsh函数图



2b 对应的积分波形

图2 前四项Walsh函数及其积分波形图

从上述展开可见,任意项的Walsh函数积分后的波形仍可用Walsh级数展开来逼近^[9]。我们将上述展开整理成矩阵形式有:

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_0(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_1(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_2(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_3(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_4(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_5(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_6(x) dx \\ \int_0^1 \varphi_7(x) dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/8 & 0 & -1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & -1/16 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/16 \\ 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \varphi_4(t) \\ \varphi_5(t) \\ \varphi_6(t) \\ \varphi_7(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

显然:
$$\int_0^t \varphi_i(x) dx = \sum_{j=1}^k E_{ij} \varphi_j(t)$$

据此我们可记:

$$\int_0^t \varphi_i(x) dx = [E_i][W] \quad (10)$$

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t x(t) dt^r = [x_0][E]^r[W] \quad (11)$$

方程(11)卓有成效地把信号的多重积分经 *Walsh* 变换成简捷的代数计算公式, 这为我们进行系统分析和系统识别提供了极为有利的运算手段。

现在我们转来考虑系统识别的 *Walsh* 变换问题。把式(10)和式(11)代入方程(6)中有:

$$\sum_{i=0}^n a_i [y_0][E]^{n-i}[W] - \sum_{j=1}^m b_j [x_0][E]^{n-j}[W] = [X_0][E]^n[W] \quad (12)$$

同时, 我们记:

$$[y_{n-i}] = [y_0][E]^{n-i},$$

$$[x_{n-j}] = [x_0][E]^{n-j}$$

$$[x_n] = [x_0][E]^n$$

欲使方程(12)两边的 *Walsh* 函数矩阵相等, 可用 $n+m+1$ 个联立方程组的求解来达到, 并可求出系数参数。当 $k > n+m+1$ 时, 利用最小均方原理的标准格式^[1], 能使系统的截项误差和信号噪音的影响最小。其标准的格式方程可描述为:

$$\sum_{r=0}^k \left\{ \sum_{i=0}^n a_i y_{n-i,r} - \sum_{j=1}^m b_j x_{n-j,r} - x_n \right\} Q_L = 0 \quad (13)$$

式中:

$$Q_L = Y_{n-i,r}, \quad L = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$= x_{n-j,r}, \quad L = n+1, \dots, n+m$$

式(13)的结论对以任意时间为周期的情形均是成立的, 它的结果与输入输出数据有关。

如果我们考虑方程(12)中的未知的初始状态影响的话, 则式(12)可修正为:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n a_i [y_0][E]^{n-i}[W] - \sum_{j=1}^m b_j [x_0][E]^{n-j}[W] - \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_j [T_j][E]^{n-1-j}[W] \\ & = [x_0][E]^n[W] \end{aligned} \quad (14)$$

其中:

$$[T_j] = [T_{j0}, T_{j1}, \dots, T_{jk}]$$

$$T_{jk} = \int_0^t t^j \varphi_k(t) dt$$

$\phi_j = f_j$ 为初始状态的参数。

相应地, 我们可把式(13)修正为

$$\sum_{r=0}^k \left\{ \sum_{i=0}^n a_i y_{n-i,r} - \sum_{j=0}^m b_j x_{n-j,r} - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j T_{(n-1)-j,r} - x_n \right\} Q_L = 0 \quad (15)$$

式中:

$$\begin{aligned} Q_L &= Y_{n-i,r} & l &= 0, 1, \dots, n \\ &= x_{2n-1,r} & l &= n+1, n+2, \dots, n+m \\ &= T_{3n-1,r} & l &= \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_1 = n+m, \nu_i = n+m+i, \end{aligned}$$

IV. 定常时滞系统的 Walsh 函数识别

现在我们讨论定常时滞系统的 Walsh 函数识别问题, 它的一般形式可以描述为:

$$\begin{aligned} c(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i c(t)}{dt^i} + \sum_{i=0}^{p_i} \sum_{j=0}^n b_{ij} \frac{d^i c}{dt^i} (t - \tau_{ij}) \\ = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \frac{d^i r(t)}{dt^i} + \sum_{i=0}^{v_i} \sum_{j=0}^{n-1} h_{ij} \frac{d^i r}{dt^i} (t - \lambda_{ij}) \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $c(t)$ 和 $r(t)$ 分别是系统的输出和输入, 在 $t \in [t_0, t_f]$ 区间它们可取任意值。方程(16)的主要问题是要确定出系统的未知参数 a_i, b_{ij}, g_i, h_{ij} 及时滞 τ_{ij}, λ_{ij} 。为了描述和讨论的方便起见, 我们现仅考虑下述的特殊情况:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i c(t)}{dt^i} = r(t - \tau) \quad (17)$$

式(17)中的 a_i 和 τ 、及初始状态均为未知数, $r(t - \tau)$ 为系统的输入信号, 记为 $u(t)$ 。 $c(t)$ 是已知的, 在 $[t_0, t_f]$ 区间它可以确定出 a_i 和 τ 来。
仿 III 中的方法, 我们对式(17)两边从 t_1 到 t_w 连续积分 n 次可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i I_{n-i}^c &= I_n^u \\ I_{n-i}^c &= \int_{t_1}^{t_w} \int_{t_1}^{t_w} \dots \int_{t_1}^{t_w} c(t) dt^{n-i} \end{aligned} \quad (18)$$

显而易见有:

$$\begin{aligned} C(t) &= [C_0][W] \\ [W] &= [\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t)]^T \\ [C_0] &= [C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0i}] \\ C_{0j} &= \frac{1}{t_w - t_1} \int_{t_1}^{t_w} c(t) \varphi_j(t) dt \end{aligned} \quad (19)$$

则我们可把式(18)整理成:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i [C_0] [E]^{n-i} [W] &= [u_0] [E]^n [W] \\ [u_0] &= [u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,n-1}] \\ u_{0,j} &= \frac{1}{t_w - t_1} \int_{t_1}^{t_w} u(t) \varphi_j(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

类似于式(14), 当我们考虑未知的初始状态的影响时有:

$$\sum_{i=0}^n a_i [C_0] [E]^{n-i} [W] - \sum_{j=1}^{n-1} r_j [T_j] [E]^{n-1-j} [W] = [u_0] [E]^n [W] \quad (21)$$

式中:

$$T_j = [T_{j,0}, T_{j,1}, \dots, T_{j,n-1}]$$

$$T_{j,i} = \frac{1}{t_w - t_1} \int_{t_1}^{t_w} \frac{(t_w - t_1)^j}{j!} \varphi_i(t) dt$$

式(21)中的每个 r_j 是取决于 $\{a_i\}$ 和初始状态的常量。对方程(21)求 $2n+1$ 个联立方程组可解出未知参数 $\{a_i\}$ 和 $\{r_j\}$ 。当 $K \geq 2n+1$ 时, 仿[1]中的方法, 利用最小二乘法把方程(21)整理成标准的格式:

$$Yp = Z \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{iq} &= \sum_{l=0}^h Q_{i,l} \cdot Q_{q,l} && \text{当 } l=1, 2, \dots, n+1 \text{ 时, } Q_{il} = C_{n-j+l, l} \\ &= T_{i, -n-2, 1} && \text{当 } j=n+2, n+3, \dots, 2n+1 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$Z_i = \sum_{l=0}^n U_{n,l} Q_{i,l} \quad (24)$$

用 $2n+1$ 个联立方程组可解得:

$$\begin{aligned} P &= [a_0, a_1, \dots, a_n, r_0, r_1, \dots, r_{n-1}]^T \\ &= [P_1, P_2, \dots, P_{2n+1}]^T \end{aligned} \quad (25)$$

向量 P 的值与所选的时基 $[t_1, t_w]$ 有关。不同的预估值 τ 有不同的向量值。它们之间的关系可用一个误差函数来表达。

$$\phi(\tau) = \sum_{i=0}^{2n+1} \sum_{j=1}^J (P_{i,j} - P_{i,j+1})^2 \quad (26)$$

其中 $P_{i,j}$ 是向量 P_i 中的第 j 项参数值, 且 $P_{i,j+1} = P_{i,1}$ 。

V、一类非线性系统的Walsh函数识别

在此, 为了下面的描述方便起见, 我们先简要地回顾一下Walsh变换的几个性质和并矢定常系统的概念^[4]。

设 $x(t) \in L^2(0, 1)$, 则其Walsh变换和逆变换定义为:

$$\left. \begin{aligned} F(\sigma) &= \int_0^{\infty} f(t) \varphi(\sigma, t) dt = W[f(t)] \\ f(t) &= \int_0^{\infty} F(\sigma) \varphi(\sigma, t) d\sigma = W^{-1}[F(\sigma)] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

多元的 Walsh 变换定义为: [2]

$$f^A(y_1 y_1^{-1} \cdots y_n) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f(x_1 x_1^{-1} \cdots x_n) \overline{W}(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) dx_1 dx_1^{-1} \cdots dx_n \quad (28)$$

式中: $W(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$ 是 $(x_1 \cdots x_n)$ 和 $(y_1 \cdots y_n) \in R_+^n$ 的 P 进 n 元 Walsh 函数。

据 Walsh 函数的乘法性质, 我们可得:

$$[W(n, t)]^i = \begin{cases} W(n, t) & \text{当 } i \text{ 为奇数时} \\ W(0, t) & \text{当 } i \text{ 为偶数时} \end{cases} \quad (29)$$

若有两个函数 $h, x \in L(R_+)$, 则它们的并矢褶积定义为:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t \otimes \tau) x(\tau) d\tau \quad (30)$$

即: $y(t) = h \otimes x$

若固定 $h \in L(R_+)$, 则式 (3) 确立了一个对应关系: $x \rightarrow y = h \otimes x$ 。我们将 x 和 y 分别作为线性系统的输入和输出, 则式 (30) 阐述了一个线性系统输入输出间的联系。

如果用 x_p 表示把 $x(t)$ 进行并矢移位 p 后所得的函数, 亦即:

$$x_p(t) = x(t \oplus p) \quad (31)$$

则系统对 $x_p(t)$ 的响应为:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^{\infty} h(t \oplus \tau) x_p(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(t \oplus \tau) X(\tau \oplus P) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} h(t \oplus p \oplus \tau) X(\tau) d\tau = y(t \oplus p) \end{aligned} \quad (32)$$

式 (32) 表明, 这样的系统是具有并矢移位不变性的系统, 也就是说当这样的系统输入 X 经过并矢移位 p 后它的输出也必须作同样的并矢移位。于是: 式 (30) 所描述的系统有时也称之谓为线性并矢定常 (LDI) 系统。

在此, 我们把拟研究的一类非线性系统表示成如图 3 所示。它是由两级 LDI 子系统和一个非线性单元的串联而成。

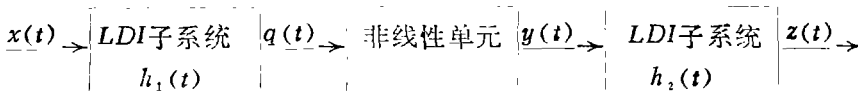


图 3 一类非线性系统结构图

为了方便起见, 我们设非线性单元的输出 $y(t)$ 与 $q(t)$ 是单值指数型的函数关系:

$$y(t) = r_1 q(t) + r_2 q^2(t) + \cdots + r_n q^n(t) \quad (33)$$

利用并矢系统的褶积关系^[5], 我们设 LDI 子系统的输出 $q(t)$ 为:

$$q(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t \oplus \tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(t \oplus \tau) x(\tau) d\tau \quad (34)$$

$x(t)$, $q(t)$ 和 $h(t)$ 分别为 LDI 系统的输入、输出及脉冲响应函数。

我们把式(34)代入式(33)得:

$$y(t) = r_1 \int_0^\infty h_1(\tau_1) x(t \oplus \tau_1) d\tau_1 + r_2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(\tau) h_1(\tau_2) x(t \oplus \tau_1) x(t \oplus \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + r_n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h_1(\tau_1) \dots h_1(\tau_n) x(t \oplus \tau_1) \dots x(t \oplus \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (35)$$

同理, 我们可以推得系统的总输出 $Z(t)$ 为:

$$Z(t) = \int_0^\infty h_2(\alpha) y(t \oplus \alpha) d\alpha \quad (36)$$

把式(35)代入式(36)并用并矢移位不变性的性质式(32), 我们得到所测的系统输出为:

$$Z(t) = r_1 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(\tau_1 \oplus \alpha) h_2(\alpha) x(t \oplus \tau_1) d\tau_1 d\alpha + r_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(\tau_1 \oplus \alpha) h_1(\tau_2 \oplus \alpha) h_2(\alpha) x(t \oplus \tau_1) x(t \oplus \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\alpha + \dots + r_n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h_1(\tau_1 \oplus \alpha) \dots h_1(\tau_n \oplus \alpha) h_2(\alpha) x(t \oplus \tau_1) x(t \oplus \tau_2) \dots x(t \oplus \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n d\alpha \quad (37)$$

式(37)的一般形式可描述为:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n \int_i g_i(\tau_1 \dots \tau_i) \prod_{p=1}^i X(t \oplus \tau_p) d\tau_p \quad (38)$$

$$g_i(\tau_1 \dots \tau_i) = r_i \int_0^\infty h_2(\alpha) \left[\prod_{p=1}^i h_1(\tau_p \oplus \alpha) \right] d\alpha \quad (39)$$

式(39)中的 $g_i(\tau_1 \dots \tau_i)$ 我们可以将其考虑成是非线性系统的 i 阶脉冲响应。若从式(38)来考虑, 则 $g_i(\tau_1 \dots \tau_i)$ 可认为是 i 阶的 Volterra 核。式(38)中的积分号 \int_i 是代表范围从 0 到 ∞ 积分的 i 次相乘。式中的级数也可称之为 Volterra 级数展开。所以有时我们称系统(36)的褶积展开也称之为 Volterra 级数展开。

据定义式(28)我们有:

$$G_i(\sigma_1 \dots \sigma_i) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g_i(\tau_1 \dots \tau_i) \varphi(\sigma_i, \tau_1) \dots \varphi(\sigma_i, \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i \quad (40)$$

$$\text{于是: } G_1(\sigma) = r_1 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty h_2(\alpha) h_1(\tau_1 \oplus \alpha) d\alpha \right] \varphi(\sigma, \tau_1) d\tau_1 \quad (41)$$

依实变函数中的 Fubini 定理及定义式(27), 我们可把式(41)整理成:

$$G_1(\sigma) = r_1 \int_0^\infty h_2(\alpha) d\alpha \left[\int_0^\infty h_1(\tau_1 \oplus \alpha) \varphi(\sigma, \tau_1) d\tau_1 \right] = r_1 \int_0^\infty h_2(\alpha) H_1(\sigma) \varphi(\sigma, \alpha) d\alpha = r_1 H_1(\sigma) \int_0^\infty h_2(\alpha) \varphi(\sigma, \alpha) d\alpha = r_1 H_1(\sigma) H_2(\sigma) \quad (42)$$

通过相似的方法和运算步骤我们有:

$$G_2(\sigma_1, \sigma_2) = r_1 H_1(\sigma_1) H_1(\sigma_2) H_2(\sigma_1 \oplus \sigma_2) \quad (43)$$

对于一般的情形我们有:

$$G_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i) = r_i H_1(\sigma_1) \dots H_1(\sigma_i) H_2(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_i) \quad (44)$$

利用多维逆Walsh变换我们有:

$$g_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = r_i \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty H_1(\sigma_1) \dots H_1(\sigma_i) H_2(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_i) \\ \varphi(\sigma_1, \tau_1) \dots \varphi(\sigma_i, \tau_i) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_i \quad (45)$$

经过上述数学变换后, 我们可以明显地看到, 在我们所讨论的一类非线性系统的识别主要是用在不同序率的Walsh输入信号激励下观测其输出量, 而输出观测量与我们所考虑系统的褶积变换中积分方程的Volterra核有关。为了研究Volterra核的确定问题, 在此我们设输入信号 $x(t)$ 是可由下式描述的。

$$X(t) = A\varphi(r, t) \quad (46)$$

仿式(34)的描述我们有:

$$g(t) = \left\{ \int_0^\infty A h_1(\tau) \varphi(r, t \oplus \tau) d\tau = \int_0^\infty A h_1(\tau) \varphi(r, t) \varphi(r, \tau) d\tau \right\} \\ = A H_1(r) \varphi(r, t) \quad (47)$$

我们把式(47)与(46)比较时可以发现: $X(t)$ 与 $g(t)$ 之间差别仅是 $H_1(r)$, 那么, 如果不考虑常数因子的话, 则 $g(t)$ 基本上也是一个Walsh函数, 并且与 $X(t)$ 有着相同的序率。

利用Walsh函数的定义式(29)和式(33), 我们可以推得非线性单元的输出为:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n r_i g^i(t) = \sum_{i=1}^n r_i A^i H_1^i(t) [\varphi(r, t)]^i \\ = \sum_{i=1}^n r_i A^i H_1^i(r) \varphi\left(\sum_{j=1}^i \oplus r, t\right) \quad (48)$$

式(48)中的 $H_1(r)$ 分量代表线性並矢定常系统在序率为 γ 时的稳态增益。所测的系统输出可由下式确定:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n r_i A^i H_1^i(r) H_1\left(\sum_{j=1}^i \oplus r\right) \varphi\left(\sum_{j=1}^i \oplus r, t\right) \quad (50)$$

对于所有的 $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{j=1}^i \oplus r$ 不是 r 就是 0 , 则我们可以按其序率进行分类,

于是式(50)可以整理成:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]} \left\{ r_i A^2 H_1(0) H_1^{2i}(r) + r_{i-1} A^{2i-1} H_1(r) H_1^{2i-1}(r) \varphi(r, t) \right\} \quad (51)$$

按照式(49)或其等效式(50), 我们可以发现: 如果线性並矢定常系统的 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 若是可分离的话, 而且又是可识别的, 则识别过程中所出现的积分方程的Volterra核是完全可

以由 r 集 $\{r=r_1, r_2, \dots, r_n\}$ 所确定。如果我们在时刻 t_m 取出其输出的观测值, $m=1, 2, \dots, n$, 由方程(51)可推出下述结果:

$$\begin{aligned} Z(t_m) = & \left[A^2 H_2(o) H_1^2(r) r_2 + A^4 H_4(o) H_1^4(r) r_4 + \dots + \right] + \\ & + \left[A H_1(r) H_1(r) r_1 + A^3 H_3(r) H_1^3(r) r_3 + \dots \right] \varphi(r, t_m) \end{aligned} \quad (52)$$

$m=1, 2, \dots, n$

对于所有的 $m, m=1, 2, \dots, n, \varphi(r, t_m) \equiv \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$.

现在按照我们比较熟悉的办法来定义Volterra核为:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= r_1 H_1(r) H_1(r) = G_1(r) \\ \beta_2 &= r_2 H_1^2(r) H_2(o) = G_2(r, r) \\ \beta_3 &= r_3 H_1^3(r) H_3(r) = G_3(r, r, r) \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_{n-1} &= r_{n-1} H_1^{n-1}(r) H_{n-1}(r) = G_{n-1}(r, r, \dots, r) \\ \beta_n &= r_n H_1^n(r) H_n(o) = G_n(r, r, \dots, r) \end{aligned} \quad (53)$$

把式(53)代入式(52)中得:

$$Z(t_m) = [\beta_2 + \beta_4 + \dots + \beta_n] + [\beta_1 + \beta_3 + \dots + \beta_{n-1}] \varphi(r, t_m) \quad (54)$$

$m=1, 2, \dots, n$

综上所述: 如果图3中所示的那两个LDI子系统是可识别的话, 则我们可以按照式(54)确定出Volterra核来。对于每个测试的序率 r , 我们都可求出 β_1, \dots, β_n 的估计值。而且我们也可采用最小均方拟合的方法把序域传递函数描述成幅值响应特性。

VI、结 束 语 与 致 谢

本文围绕着Walsh函数在系统识别中的应用问题进行了研究, 给出了具体计算公式的表达式。从这些结论性的表达式中不难发现, 通过Walsh变换, 可以把令人讨厌的烦琐计算简化成一个代数运算又可藉助于计算机加予实现。这点在工程上具有重大的现实意义。另则, 采用类似本文的方法, 不难把上述结果推广到分布参数系统识别和双线性系统识别中去。在此我们就不一一描述了。

本文承蒙审稿者提出宝贵的修改意见, 作者谨表示衷心地感谢!

作者尚衷心地感谢省图书馆林良溪同志热忱地帮助索取情报资料。

参 考 文 献

- [1] 厦门大学数学系, 系统识别(讲义), (1979).
- [2] 陈玉宝, 线性控制系统的Walsh级数综合, 华侨大学学报, 1 (1982).
- [3] Corrington, M. S., *Solution of differential and integral Equations With Walsh functions*, *IEEE Trans*, 20(1973), 470.
- [4] M. Magusi, *On the Walsh analysis of nonlinear Systems*, *IEEE Trans Information Theory*, 17—23, (1977).
- [5] S. A. Billings and S. Y. Fakhouri, *Identification of a Class of nonlinear Systems Using Correlation analysis*, *proc. IEEE*, 125, (1978), 691—697.
- [6] 陈玉宝, Walsh函数在波形综合中的应用, 华侨大学学报, 1 (1980).
- [7] 清华大学, 现代控制理论基础(讲义), (1979)