求逻辑函数布尔差分的方法

刘　　希

（电子工程系）

摘　　要

首先本文对布尔差分的基本性质和定理作了证明。凡属于经尽力查索资料尚缺少证明的，本文均加以证明，並注上“补充证明”。

其次本文对于求逻辑函数的布尔差分的六种方法均举例加以演算说明。为了说明用图形法求逻辑函数布尔差分的方法，本文对不同情况加以讨论，对其原理也加以推导。以利使用时更为明确。

最后对有关资料提供的两条定理，原文未介绍其证明及出处，本文也给予补充证明。这两条定理是：

（1）假设　$F(X)=\prod_{k=1}^{m} G_k(X)$　　其中　$X=(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$

则

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)+\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)\right]\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{dG_k(X)}{dx_i}$$

这里　$X^*=(x_1, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n)$

（2）假设　$F(X)=\sum_{k=1}^{m} G_k(X)$

则

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\left[\prod_{k=1}^{m} \overline{G_k(X)}+\prod_{k=1}^{m} \overline{G_k(X^*)}\right]\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{dG_k(X)}{dx_i}$$

§1　布尔差分的定义及性质

推导组合逻辑电路的故障测试集，需要概念上简单明瞭，并且方法上直观，布尔差分就有这些优点。

布尔差分定义为两个布尔函数$F(X)$与$F(\bar{X})$的异或运算。

这里假设$F(X)=F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$为具有$n$个输入端，相应的输入变量为$x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n$正常时某逻辑电路的布尔函数。

$F(\bar{X})$为相应于上述组合逻辑电路，当该电路的i线有固定性故障时的布尔函数。

$F(\bar{X}) = F(x_1, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n)$

显然的，若$F(X)$对x_i是“非冗余”的，相关的，则

$$F(X) \neq F(\bar{X}) \cdots\cdots (1)\text{式}$$

若$F(X)$对x_i是不相关的，则

$$F(X) = F(\bar{X}) \cdots\cdots (2)\text{式}$$

§ 1—1 定义　$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \oplus F(x_1, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n)$

称函数$\dfrac{dF(X)}{dx_i}$为函数$F(X)$关于x_i的布尔差分。

用导数的符号来表示布尔差分是有它的特殊含意的。因为布尔函数$F(X)$和它的变量x，两者均只可能取0值或取1值，因此变量x若为0值（或1）它只能改变为1（或0），所以x的改变量总是等于“1”。这改变量可以用x改变为$\bar{x}$来表示，并可从表达式看到

$$\Delta x = x \oplus \bar{x} = 1$$

研究二进制函数$F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$由于变量$x_i$的改变（$\Delta x_i = 1$）而引起的改变，有四种可能

(1) $F(X) = 0$　$F(\bar{X}) = 0$　$\Delta x_i = 1$　$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = F(X) \oplus F(\bar{X}) = 0$

$\because\ 0 \oplus 0 = 0$

(2) $F(X) = 1$　$F(\bar{X}) = 1$　$\Delta x_i = 1$　$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = 0$

$\because\ 1 \oplus 1 = 0$

(3) $F(X) = 0$　$F(\bar{X}) = 1$　$\Delta x_i = 1$　$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = 1$

$\because\ 0 \oplus 1 = 1$

(4) $F(X) = 1$　$F(\bar{X}) = 0$　$\Delta x_i = 1$　$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = 1$

$\because\ 1 \oplus 0 = 1$

从中可以看出，当$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = 1$时意味着$F(X)$的值随着x改变到$\bar{x}$时有改变，当$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = 0$时意味着随着x的改变$F(X)$的值没有改变。

§ 1—2　布尔差分的性质

§ 1—2—1 性质　$\dfrac{d\bar{F}(X)}{dx_i} = \dfrac{dF(X)}{dx_i}$

证明：$\dfrac{dF(X)}{dx_i} = F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \oplus F(x_1, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n) = A \oplus B$

$$\frac{d\bar{F}(X)}{dx_i}=\bar{F}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\oplus\bar{F}(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)=\bar{A}\oplus\bar{B}$$

$$\because A\oplus B=A\bar{B}+\bar{A}B=\bar{\bar{A}}\bar{B}+\bar{A}\bar{\bar{B}}=\bar{A}\oplus\bar{B}$$

$$\therefore \frac{d\bar{F}(X)}{dx_i}=\frac{dF(X)}{dx_i}$$

§ 1—2—2 性质 $\dfrac{dF(X)}{dx_i}=\dfrac{dF(X)}{d\bar{x}_i}$

证明：

$$\frac{dF(X)}{d\bar{x}_i}=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,\bar{\bar{x}}_i,\cdots,x_n)$$

$$=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

$$=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{dF(X)}{dx_i}$$

注意 $A\oplus B=B\oplus A$

§ 1—2—3 性质 $\dfrac{d}{dx_i}\dfrac{dF(X)}{dx_j}=\dfrac{d}{dx_j}\dfrac{dF(X)}{dx_i}$

证明：$\because \dfrac{dF(X)}{dx_i}=F(x_1,\cdots,1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\oplus(x_1,\cdots,0,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$

请见后面§ 4定理及补充证明。

$$\therefore \frac{d}{dx_j}\frac{dF(X)}{dx_i}=\Big[F(x_1,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,1,\cdots,x_n)\Big]$$

$$\oplus\Big[F(x_1,\cdots,1,\cdots,0,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,0,\cdots,x_n)\Big]$$

$$=F(x_1\cdots,1,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,1,\cdots,x_n)$$

$$\oplus F(x_1\cdots,1,\cdots,0,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,0,\cdots,x_n)$$

$$\because (A\oplus B)\oplus(C\oplus D)=A\oplus B\oplus C\oplus D$$

又$\because \dfrac{dF(X)}{dx_j}=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,0,\cdots,x_n)$

请见后面§ 4定理及补充证明。

$$\therefore \frac{d}{dx_i}\frac{dF(X)}{dx_j}=\Big[F(x_1,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,1,\cdots,0,\cdots,x_n)\Big]$$

$$\oplus\Big[F(x_1,\cdots,0,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,0,\cdots,x_n)\Big]$$

$$=F(x_1,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,1,\cdots,0,\cdots,x_n)$$

$$\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,1,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,0,\cdots,0,\cdots,x_n)$$

$$\because A\oplus B\oplus C\oplus D=A\oplus C\oplus B\oplus D$$

$$\therefore \frac{d}{dx_j}\frac{dF(X)}{dx_i}=\frac{d}{dx_i}\frac{dF(X)}{dx_j}$$

§ 1—2—4 性质

$$\frac{d[F(X)G(X)]}{dx_i}=F(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus G(X)\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dF(X)}{dx_i}\frac{dG(X)}{dx_i}$$

证明：$F(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus G(X)\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dF(X)}{dx_i}\frac{dG(X)}{dx_i}$

$$=F(X)\Big[G(X)\oplus G(\bar{X})\Big]\oplus G(X)\Big[F(X)\oplus F(\bar{X})\Big]$$

$$\oplus\Big[F(X)\oplus F(\bar{X})\Big]\Big[G(X)\oplus G(\bar{X})\Big]$$

$$=F(X)\Big[G(X)\oplus G(\bar{X})\Big]\oplus\Big[F(X)\oplus F(\bar{X})\Big]\Big[G(X)\oplus G(X)\oplus G(\bar{X})\Big]$$

$$\because\ AB\oplus AC=A(B\oplus C)$$

$$=F(X)\Big[G(X)\oplus G(\bar{X})\Big]\oplus\Big[F(X)\oplus F(\bar{X})\Big]\Big[0\oplus G(\bar{X})\Big]$$

$$\because\ A\oplus A=0$$

$$=F(X)\Big[G(X)\oplus G(\bar{X})\Big]\oplus\Big[F(X)\oplus F(\bar{X})\Big]G(\bar{X})$$

$$\because\ 0\oplus A=A$$

$$=F(X)G(X)\oplus F(X)G(\bar{X})\oplus F(X)G(\bar{X})\oplus F(\bar{X})G(\bar{X})$$

$$=F(X)G(X)\oplus 0\oplus F(\bar{X})G(\bar{X})\qquad\therefore A\oplus A=0$$

$$=\frac{d[F(X)G(X)]}{dx_i}$$

式中：$F(X)=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$

$F(\bar{X})=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$

$G(X)=G(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$

$G(\bar{X})=G(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$

§ 1—2—5 性质

$$\frac{d[(X)+G(X)]}{dx_i}=\bar{F}(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus\bar{G}(X)\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dF(X)}{dx_i}\frac{dG(X)}{dx_i}$$

证明：$\frac{d[F(X)+G(X)]}{dx_i}=\frac{d[\overline{F(X)+G(X)}]}{dx_i}$　请见§ 1—2—1 性质。

$$=\frac{d[\bar{F}(X)\cdot\bar{G}(X)]}{dx_i}\qquad\because A+B=\bar{A}\cdot\bar{B}$$

$$=\bar{F}(X)\frac{d\bar{G}(X)}{dx_i}\oplus\bar{G}(X)\frac{d\bar{F}(X)}{dx_i}\oplus\frac{d\bar{F}(X)}{dx_i}\cdot\frac{d\bar{G}(X)}{dx_i}$$

$$=\bar{F}(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus\bar{G}(X)\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dF(X)}{dx_i}\frac{dG(X)}{dx_i}$$

式中$\bar{F}(X)$是$F(X)$的补，$\bar{G}(X)$是$G(X)$的补。

§ 1—2—6 性质

$$\frac{d[F(X)\oplus G(X)]}{dx_i}=\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dG(X)}{dx_i}$$

证明：由§ 1—1 定义得：

$$\frac{d[F(X)\oplus G(X)]}{dx_i}=[F(X)\oplus G(X)]\oplus[F(\bar{X})\oplus G(\bar{X})]$$

$$=F(X)\oplus F(\bar{X})\oplus G(X)\oplus(\bar{X}')$$

$$=\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dG(X)}{dx_i}$$

§2　定　　义

仅当在$F(X)$中将x_i用其反（即$\bar{x}_i$代入后），$F(X)$逻辑值不变时，可以说布尔函数$F(X)$对x_i无关〔亦即$F(x_1,\cdots,x_i\cdots,x_n)=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$〕。

这一定义说明若把$F(X)$当作一个组合逻辑电路的输出函数来考虑，则只有当任何其他变量，不管它们取任何值，$F(X)$都是和x_i的值无关的，i线上的故障不影响$F(X)$的最后输出值。

下面的定理所谈的这种无关性，使用布尔差分就可容易地说明。

§3　定　　理

函数$F(X)$对x_i无关的充分必要条件是$\frac{dF(X)}{dx_i}=0$

证明：根据§2定义和条件$F(X)=F(\bar{X})$

$$\therefore\quad\frac{dF(X)}{dx_i}=F(X)\oplus F(\bar{X})=0$$

§3—1 性质

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=0\ [\text{当}F(X)\text{与}x_i\text{无关}]$$

此性质由上述定理得来。

§3—2 性质

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=1\ [\text{当}F(X)\text{仅仅依赖于}x_i]$$

补充证明：因为$F(X)$仅仅依赖于x_i

若　$F(X)=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=0$

则　$F(\bar{X})=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)=1$

因而　$F(X)\oplus F(\bar{X})=0\oplus1=1$

亦即　$\frac{dF(X)}{dx_i}=1$

若　$F(X)=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=1$

则　$F(\bar{X})=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)=0$

因而　$F(X)\oplus F(\bar{X}=1\oplus0=1$

亦即 $\dfrac{dF(X)}{dx_i}=1$

§ 3—3 性质

$$\frac{d[F(X)G(X)]}{dx_i}=F(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\quad [\text{当}F(X)\text{与}x_i\text{无关}]$$

补充证明：∵ $F(X)$ 与 x_i 无关　∴ $\dfrac{dF(X)}{dx_i}=0$

由 § 1—2—4 性质可得：

$$\frac{d[F(X)G(X)]}{dx_i}=F(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus G(X)\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dF(X)}{dx_i}\frac{dG(X)}{dx_i}$$

$$=F(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus 0\oplus 0$$

$$=F(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\qquad \because A\oplus 0=A$$

§ 3—4 性质

$$\frac{d[F(X)+G(X)]}{dx_i}=\bar{F}(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\quad [\text{当}F(X)\text{与}x_i\text{无关}]$$

补充证明：由 § 1—2—5 性质和 § 3—1 性质得

$$\frac{d[F(X)+G(X)]}{dx_i}=\bar{F}(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus\bar{G}(X)\frac{dF(X)}{dx_i}\oplus\frac{dF(X)}{dx_i}\frac{dG(X)}{dx_i}$$

$$=\bar{F}(X)\frac{dG(X)}{dx_i}\oplus 0\oplus 0$$

$$=\bar{F}(X)\frac{dG(X)}{dx_i}$$

§4　定　　理

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=F(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},x_n)$$

对任意的 x，$1\leqslant i\leqslant n$

本文补充证明分为如下三个步骤：

（一）首先证明：若布尔函数 $F(X)=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$

则 $F(X)=x_iF(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)\oplus\bar{x}_iF(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$

…… § 4—1 式

为了方便缩写，令 $F(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)=F(1)$

也就是在 $F(X)$ 中的 x_i 用 $x_i=1$ 代入。

同样缩写，令 $F(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)=F(0)$

也就是在 $F(X)$ 中的 x_i 用 $x_i=0$ 代入。

于是 § 4—1 式表达为 $F(X)=x_iF(1)\oplus\bar{x}_iF(0)$

…… § 4—2 式

因为$F(X)$亦可最终变形为

$$F(X)=A(X)+x_iB(X)+\bar{x}_iC(X) \qquad \cdots\cdots §\ 4—3\text{式}$$

所以只须证明

$$A(X)+x_iB(X)+\bar{x}_iC(X)=x_iF(1)\oplus\bar{x}_iF(0)$$

式中$A(X)$，$B(X)$，$C(X)$为和x_i无关的函数。

当$x_i=1$代入§ 4—3式时得

$$F(1)=A(X)+1\cdot B(X)+0\cdot C(X)$$

$$F(1)=A(X)+B(X) \qquad \cdots\cdots §\ 4—4\text{式}$$

当$x_i=0$代入§ 4—3式时，得

$$F(0)=A(X)+C(X) \qquad \cdots\cdots §\ 4—5\text{式}$$

把§ 4—4，§ 4—5式代入§ 4—2式的右边，得

$$x_iF(1)\oplus x_iF(0)=x_i\Big[A(X)+B(X)\Big]\oplus\bar{x}_i\Big[A(X)+C(X)\Big]$$

$$=x_i\Big[A(X)+B(X)\Big]\overline{\bar{x}_i\Big[A(X)+C(X)\Big]}+\overline{x_i\Big[A(X)+B(X)\Big]}\bar{x}_i\Big[A(X)+C(X)\Big]$$

$$=x_i\Big[A(X)+B(X)\Big]\Big[\bar{\bar{x}}_i+\bar{A}(X)\cdot\bar{C}(X)\Big]+\Big[\bar{x}_i+\bar{A}(X)\cdot\bar{B}(X)\Big]\bar{x}_i\Big[A(X)+C(X)\Big]$$

$$=\Big[x_iA(X)+x_iB(X)\Big]\Big[x_i+\bar{A}(X)\cdot\bar{C}(X)\Big]+\Big[\bar{x}_i+\bar{A}(X)\bar{B}(X)\Big]\Big[\bar{x}_iA(X)+\bar{x}_iC(X)\Big]$$

$$=x_iA(X)+x_iA(X)\bar{A}(X)\bar{C}(X)+x_iB(X)+x_iB(X)\bar{A}(X)\bar{C}(X)+\bar{x}_iA(X)+\bar{x}_iC(X)$$

$$+\bar{x}_i\bar{A}(X)\bar{B}(X)A(X)+\bar{x}_i\bar{A}(X)\bar{B}(X)C(X)$$

$$=A(X)\Big[x_i+\bar{x}_i\Big]+\bar{x}_iC(X)\Big[1+\bar{A}(X)\bar{B}(X)\Big]+x_iB(X)\Big[1+\bar{A}(X)\bar{C}(X)\Big]$$

$$\because A\cdot\bar{A}=0 \quad A+\bar{A}=1 \quad 1+A=0$$

$$=A(X)+x_iB(X)+\bar{x}_iC(X)$$ 证毕

（二）其次证明布尔函数$F(X)=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$

若 $F(\bar{X})=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n,)$ 　　…… § 4—6

则 $F(\bar{X})=\bar{x}_iF(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)\oplus x_iF(x_1\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1}\cdots,x_n)$

亦即 $F(\bar{X})=\bar{x}_iF(1)\oplus x_iF(0)$ 　　…… § 4—7

证明：$\because$ $F(X)=A(X)+x_iB(X)+\bar{x}_iC(X)$

则 $F(\bar{x})=A(X)+\bar{x}_iB(X)+\bar{\bar{x}}_iC(X)$

$=A(X)+\bar{x}_iB(X)+x_iC(X)$ 　　…… § 4—8

所以只须证明

$$A(X)+\bar{x}_iB(X)+x_iC(X)=\bar{x}_iF(1)\oplus x_iF(0)$$

把§ 4—4，§ 4—5式代入§ 4—7的右边，得

$$\bar{x}_iF(1)\oplus x_iF(0)=\bar{x}_i\Big[A(X)+B(X)\Big]\oplus x_i\Big[A(X)+C(X)\Big]$$

$$=\bar{x}_i\Big[A(X)+B(X)\Big]\overline{x_i\Big[A(F)+C(X)\Big]}+\overline{\bar{x}_i\Big[A(X)+B(X)\Big]}x_i\Big[A(X)+C(X)\Big]$$

$$=\Big[\bar{x}_iA(X)+\bar{x}_iB(X)\Big]\Big[\bar{x}_i+\bar{A}(X)\bar{C}(X)\Big]+\Big[x_i+\bar{A}(X)\cdot\bar{B}(X)\Big]\Big[x_iA(X)+x_iC(X)\Big]$$

$$=\bar{x}_iA(X)+\bar{x}_iA(X)\bar{A}(X)\bar{C}(X)+\bar{x}_iB(X)+\bar{x}_iB(X)\bar{A}(X)\bar{C}(X)+x_iA(X)+x_iC(X)$$

$$+\bar{A}(X)\bar{B}(X)x_iA(X)+\bar{A}(X)\bar{B}(X)x_iC(X)$$

$$=A(X)(x_i+\bar{x}_i)+\bar{x}_iB(X)\Big[1+\bar{A}(X)\bar{C}(X)\Big]+x_iC(X)\Big[1+\bar{A}(X)\bar{B}(X)\Big]$$

$$=A(X)+\bar{x}_iB(X)+x_iC(X)$$

证毕

（三）最后证明§4定理：

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=F(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

……§4

缩写即 $\frac{dF(X)}{dx_i}=F(1)\oplus F(0)$

证明：上即§4式，按布尔差分定义

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$$

$$=F(X)\oplus F(\bar{X})$$ 以§4—2式和§4—7式代入得

$$=\Big[x_iF(1)\oplus\bar{x}_iF(0)\Big]\oplus\Big[\bar{x}_iF(1)\oplus x_iF(0)\Big]$$

$$=x_iF(1)\oplus\bar{x}_iF(0)\oplus\bar{x}_iF(1)\oplus x_iF(0)$$

$$=F(1)\Big[x_i\oplus\bar{x}_i\Big]\oplus F(0)\Big[x_i\oplus\bar{x}_i\Big]\qquad\because x_i\oplus\bar{x}_i=1$$

$$=F(1)\oplus F(0)$$

$$=F(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

证毕

§5 定 理

如果$F(X)$在形式上可表达为

$F(X)=A(X)+x_iB(X)+\bar{x}_iC(X)$

其中$A(X)$、$B(X)$和$C(X)$不是x_i的函数，则

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\Big[B(X)\oplus C(X)\Big]\bar{A}(X)$$

本文补证如下：

因$A(X)$、$B(X)$、$C(X)$都不是x_i的函数，

故令$A(X)=A$；$B(X)=B$；$C(X)=C$。

$\because\ F(X)=A(X)+x_iB(X)+\bar{x}_iC(X)=A+x_iB+\bar{x}_iC$

$\therefore\ F(\bar{X})=A(X)+\bar{x}_iB(X)+x_iC(X)=A+\bar{x}_iB+x_iC$

按布尔差分定义

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=F(X)\oplus F(\overline{X})$$

$$=\left[A+x_iB+\bar{x}_iC\right]\oplus\left[A+\bar{x}_iB+x_iC\right]$$

$$=\left[A+x_iB+\bar{x}_iC\right]\left[\overline{A+\bar{x}_iB+x_iC}\right]+\left[\overline{A+x_iB+\bar{x}_iC}\right]\left[A+\bar{x}_iB+x_iC\right]$$

$$=\left[A+x_iB+\bar{x}_iC\right]\left[\bar{A}\cdot\overline{\bar{x}_iB}\cdot\overline{x_iC}\right]+\left[\bar{A}\cdot\overline{x_iB}\cdot\overline{\bar{x}_iC}\right]\left[A+\bar{x}_iB+x_iC\right]$$

$$=x_iB\left(\bar{A}\cdot\overline{\bar{x}_iB}\cdot\overline{x_iC}\right)+\bar{x}_iC\left(\bar{A}\cdot\overline{\bar{x}_iB}\cdot\overline{x_iC}\right)+\bar{x}_i\cdot B\left(\bar{A}\cdot\overline{x_iB}\cdot\overline{\bar{x}_iC}\right)$$

$$+x_iC\left(\bar{A}\cdot\overline{x_iB}\cdot\overline{\bar{x}_iC}\right)\qquad\because\bar{A}\cdot A=0$$

$$=x_iB\cdot\bar{A}(\bar{\bar{x}}_i+\bar{B})(\bar{x}_i+\bar{C})+\bar{x}_iC\cdot\bar{A}(\bar{\bar{x}}_i+\bar{B})(\bar{x}_i+\bar{C})$$

$$+\bar{x}_iB\cdot\bar{A}(\bar{x}_i+\bar{B})(\bar{\bar{x}}_i+\bar{C})+x_iC\cdot\bar{A}(\bar{x}_i+\bar{B})(\bar{\bar{x}}_i+\bar{C})$$

$$=x_iB\bar{A}(x_i\bar{C}+\bar{x}_i\bar{B}+\bar{B}\bar{C})+\bar{x}_iC\bar{A}(x_i\bar{C}+\bar{x}_i\bar{B}+\bar{B}\bar{C})$$

$$+\bar{x}_iB\bar{A}(\bar{x}_i\bar{C}+x_i\bar{B}+\bar{B}\bar{C})+x_i\bar{A}C(\bar{x}_i\bar{C}+x_i\bar{B}+\bar{B}\bar{C})$$

$$=x_i\bar{A}B\bar{C}+\bar{x}_i\bar{A}\bar{B}C+\bar{x}_i\bar{A}B\bar{C}+x_i\bar{A}\bar{B}C\qquad\therefore A\times\bar{A}=0$$

$$=x_i\bar{A}(B\bar{C}+\bar{B}C)+\bar{x}_i\bar{A}(\bar{B}C+B\bar{C})$$

$$=(x_i+\bar{x}_i)\left[\bar{A}(B\oplus C)\right]$$

$$=\bar{A}(B\oplus C)=\bar{A}(X)\left[B(X)\oplus C(X)\right]\qquad\text{证毕}$$

§6　定　理

假设$F(X)=\prod_{k=1}^{m}G_k(X)$，其中$X=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$

则$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)+\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{dG_k(X)}{dx_i}$$

式中$X^*=(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$

本文补充证明如下：

准备公式：　$\prod_{k=1}^{m}G_k=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{m-1}\cdot a_m$

初级布尔函数$\prod_{k=1}^{m}a_k=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{m-1}\cdot a_m=\bar{\bar{a}}_1\cdot\bar{\bar{a}}_2\cdot\cdots\cdot\bar{\bar{a}}_{m-1}\cdot\bar{\bar{a}}_m=\overline{\bar{a}_1+\bar{a}_2+\cdots+\bar{a}_{m-1}+\bar{a}_m}$

$$= \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k$$

$$\therefore \overline{\prod_{k=1}^{m} a_k} = \overline{\sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k} = \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k \cdots\cdots \S\ 6-1$$

按布尔差分定义

$$\frac{dF(X)}{dx_i} = \prod_{k=1}^{m} G_k(X) \oplus \prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)$$

$$= \prod_{k=1}^{m} G_k(X) \overline{\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)} + \overline{\prod_{k=1}^{m} G_k(X)} \prod_{k=1}^{m} G(X^*)$$

$$= \prod_{k=1}^{m} G_k(X) \cdot \sum_{k=1}^{m} \bar{G}_k(X^*) + \sum_{k=1}^{m} \bar{G}_k(X) \cdot \prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)$$

注意到 $\prod_{k=1}^{m} G_k(X) = G_k(X) \prod_{k=1}^{m} G_k(X)$ $\qquad \prod_{k=1}^{m} G_k(X^*) = G_k(X^*) \prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)$

$$\left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \bar{G}_i(X) = 0 \qquad \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)\right] \bar{G}_k(X^*) = 0$$

$$\therefore \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \bar{G}_k(X^*) = G_k(X) \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \bar{G}_k(X^*) = \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] G_k(X) \bar{G}_k(X^*)$$

$\cdots\cdots \S\ 6—2$ 式

同理：$\left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)\right] \bar{G}_k(X^*) = \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)\right] \bar{G}_k(X) G_k(X^*)$ $\cdots\cdots \S\ 6—3$ 式

$\left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \bar{G}_k(X) \cdot G_k(X^*) = 0$ $\cdots\cdots \S\ 6—4$ 式

$\left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)\right] \bar{G}_k(X^*) \cdot G_k(X) = 0$ $\cdots\cdots \S\ 6—5$ 式

$$\therefore \frac{dF(X)}{dx_i} = \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \left[\bar{G}_1(X^*)\right] + \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \left[\bar{G}_2(X^*)\right] + \cdots$$

$$+ \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X)\right] \left[\bar{G}_m(X^*)\right] + \left[\prod_{k=1}^{m} G_k(X^*)\right] \left[\bar{G}_1(X)\right]$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[\bar{G}_2(X)\right]+\cdots+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[\bar{G}_m(X)\right]$$

把　§6—2，§6—3，§6—4，§6—5式代入得

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\right]\left[\bar{G}_1(X^*)\right]\left[G_1(X)\right]+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\right]\left[G_1(X^*)\right]\left[\bar{G}_1(X)\right]$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\right]\left[\bar{G}_2(X^*)\right]\left[G_2(X)\right]+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\right]\left[G_2(X^*)\right]\left[\bar{G}_2(X)\right]+\cdots$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\right]\left[\bar{G}_m(X^*)\right]\left[G_m(X)\right]+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\right]\left[G_m(X^*)\right]\left[\bar{G}_m(X)\right]$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[\bar{G}_1(X)\right]\left[G_1(X^*)\right]+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[G_1(X)\right]\left[\bar{G}_1(X^*)\right]$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[\bar{G}_2(X)\right]\left[G_2(X^*)\right]+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[G_2(X)\right]\left[\bar{G}_2(X^*)\right]+\cdots$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[\bar{G}_m(X)\right]\left[G_m(X^*)\right]+\left[\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\right]\left[G_m(X)\right]\left[\bar{G}_m(X^*)\right]$$

$$=\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\left[G_1(X)\cdot\bar{G}_1(X^*)+\bar{G}_1(X)\cdot G_1(X^*)\right]$$

$$+\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\left[G_2(X)\cdot\bar{G}_2(X^*)+\bar{G}_2(X)\cdot G_2(X^*)\right]+\cdots$$

$$+\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\left[G_m(X)\bar{G}_m(X^*)+\bar{G}_m(X)G_m(X^*)\right]$$

$$+\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\left[G_1(X)\bar{G}_1(X^*)+\bar{G}_1(X)G_1(X^*)\right]$$

$$+\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\left[G_2(X)\bar{G}_2(X^*)+\bar{G}_2(X)G_2(X^*)\right]+\cdots$$

$$+\prod_{k=1}^{m}G_k(X^*)\left[G_m(X)\bar{G}_m(X^*)+\bar{G}_m(X)G_m(X^*)\right]$$

$$=\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\left[\frac{dG_1(X)}{dx_i}\right]+\prod_{k=1}^{m}G_k(X)\left[\frac{dG_2(X)}{dx_i}\right]+\cdots$$

$$+\prod_{h=1}^{m}G_h(X)\left[\frac{dG_m(X)}{dx_i}\right]+\prod_{h=1}^{m}G_h(X^*)\left[\frac{dG_1(X)}{dx_i}\right]$$

$$+\prod_{h=1}^{m}G_h(X^*)\left[\frac{dG_2(X)}{dx_i}\right]+\cdots+\prod_{h=1}^{m}G_h(X^*)\left[\frac{dG_m(X)}{dx_i}\right]$$

$$=\prod_{h=1}^{m}G_h(X)\left[\sum_{h=1}^{m}\frac{dG_h(X)}{dx_i}\right]+\prod_{h=1}^{m}G_h(X^*)\left[\sum_{h=1}^{m}\frac{dG_h(X)}{dx_i}\right]$$

$$=\left[\prod_{h=1}^{m}G_h(X)+\prod_{h=1}^{m}G_h(X^*)\right]\sum_{h=1}^{m}\frac{dG_h(X)}{dx_i}\quad \text{证毕}$$

§7 定 理

假设$F(X)=\sum_{h=1}^{m}G_h(X)$，则

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\left[\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X)+\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X^*)\right]\cdot\sum_{h=1}^{m}\frac{dG_h(X)}{dx_i}$$

式中X、X^*与§6定理的定义相同

本文补充证明如下：

因为$\overline{\sum_{h=1}^{m}a_h}=\overline{a_1+a_2+\cdots+a_m}=\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2\cdot\cdots\cdot\bar{a}_{m-1}\cdot\bar{a}_m=\prod_{h=1}^{m}\bar{a}_h$

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=\frac{d\sum_{h=1}^{m}G_h(X)}{dx_i}=\frac{d\overline{\sum_{h=1}^{m}G_h(X)}}{dx_i}\quad \text{见性质§1—2—1}$$

$$=\frac{d\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X)}{dx_i}\quad \text{代入§6定理}$$

$$=\left[\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X)+\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X^*)\right]\sum_{h=1}^{m}\frac{d\bar{G}_h(X)}{x}\qquad \because \frac{d\bar{G}_h(X)}{dx_i}=\frac{dG_h(X)}{dx_i}$$

$$=\left[\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X)+\prod_{h=1}^{m}\bar{G}_h(X^*)\right]\sum_{h=1}^{m}\frac{dG_h(X)}{dx_i}\quad \text{证毕}$$

§8 求逻辑函数布尔差分的方法

求逻辑函数的布尔差分，至少有六种方法，下面用一两个具体的例来讨论。

例：求逻辑函数$F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$对$x_1$的布尔差分。

方法（一）：也叫解析法，主要用§ 1—2—1 到§ 1—2—6 及§ 3—1 到§ 3—4 的十条性质，也可选用定理§ 6、定理§ 7。

$$\frac{dF(X)}{dx_1}=\left[\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\right]\frac{d(x_1\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\oplus\left[\overline{x_1\bar{x}_2x_3}\right]\frac{d(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}$$

$$\oplus\frac{d(x_1\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\cdot\frac{d(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}\qquad \text{根据§ 1—2—5 性质}$$

$$=\left[\overline{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4}\right]\left[x_1\frac{d(\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\oplus\bar{x}_2x_3\frac{dx_1}{dx_1}\oplus\frac{dx_1}{dx_1}\cdot\frac{d(\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\right]$$

$$\oplus\left[\overline{x_1\bar{x}_2x_3}\right]\left[\bar{x}_1\frac{d(x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}\oplus(x_2\bar{x}_3x_4)\frac{d\bar{x}_1}{dx_1}\oplus\frac{d\bar{x}_1}{dx_1}\frac{d(x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}\right]$$

$$\oplus\left[x_1\frac{d(\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\oplus(\bar{x}_2x_3)\frac{dx_1}{dx_1}\oplus\frac{dx_1}{dx_1}\frac{d(\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\right]\left[\bar{x}_1\frac{d(x_1\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\right.$$

$$\left.\oplus(x_2\bar{x}_3x_4)\frac{d\bar{x}_1}{dx_1}\oplus\frac{d\bar{x}_1}{dx_1}\frac{d(x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}\right]\qquad \text{根据§ 1—2—4 性质}$$

$$=\overline{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4}(\bar{x}_2x_3)\oplus\overline{x_1\bar{x}_2x_3}(x_2\bar{x}_3x_4)$$

$$=\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3x_4\qquad \text{根据§ 3—1、§ 3—2 性质及 } a\bar{a}=0$$

方法（二）：这种方法根据定理§ 4

$$\frac{dF(X)}{dx_1}=(0\cdot x_2\bar{x}_3x_4+1\cdot\bar{x}_2x_3)\oplus(1\cdot x_2\bar{x}_3x_4+0\cdot\bar{x}_2x_3)$$

$$=\bar{x}_2x_3\oplus x_2\bar{x}_3x_4$$

$$=\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3x_4$$

方法（三）：这种方法根据定理§ 5

由 $F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$，得

$$A(X)=0,\qquad B(X)=\bar{x}_2x_3,\qquad C(X)=x_2\bar{x}_3x_4$$

$$\frac{dF(X)}{dx_1}=\left[B(X)\oplus C(X)\right]\bar{A}(X)$$

$$=\left[(\bar{x}_2x_3)\oplus(x_2\bar{x}_2x_3)\right]\cdot 1$$

$$=\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3x_4$$

除了以上三种解析法，此外还有三种图形法，下面分别说明。

方法（四）：根据布尔差分定义：

$$\frac{dF(X)}{dx_i}=F(x_1,x_2,\cdots x_i,\cdots,x_n)\oplus F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$$

步骤：以下例说明

例①：$F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4x+x_1\bar{x}_2x_3$

①把 $F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 填入K—map 如图§ 8—1（A）

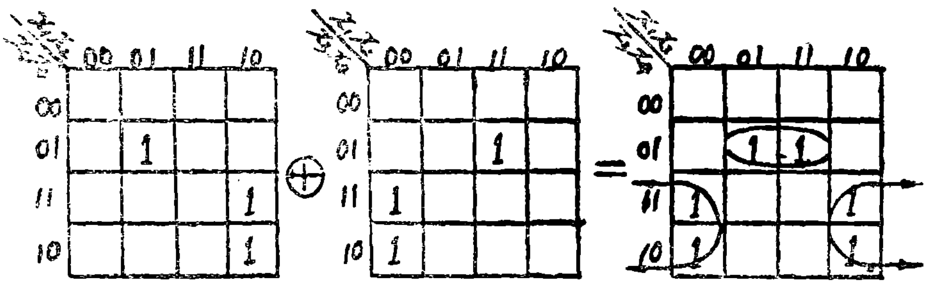
$F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$

②求出 $F(\bar{X})=F(x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_n)$ 填入K—map图§8—1（B）中，如与$F(X)$相对应的为

$F(\bar{X})=x_1x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$

③根据$1\oplus1=0$　$1\oplus0=1$的原则，求出图§8—1（C）

④按K—map简化逻辑函数的办法，求出图§8—1（C）的逻辑表达式，即$\dfrac{dF(X)}{dx_1}$



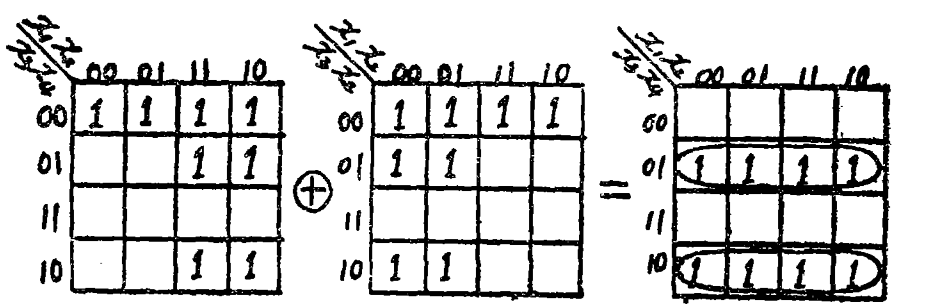
图§8—1（A）　图§8—1（B）　图§8—1（C）

$F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$　$F(\bar{X})=x_1x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$　$\dfrac{dF(X)}{dx_1}=x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3$

例 ① $F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$，（A）图与（B）中对应的最小项（K—map为"1"的）彼此都不同，因此这里只用到$1\oplus0=1$。

例 ② 求$F(X)=\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3+x_1\bar{x}_4$ 对 x_1 的布尔差分。

解：$F(\bar{X})=\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_4$



图§8—2（a）　图§8—2（b）　图§8—2（c）

$F(X)=\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3+x_1\bar{x}_4$　$F(\bar{X})=\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_4$　$\dfrac{dF(X)}{dx_1}=x_3\bar{x}_4+\bar{x}_3x_4$

在K—map §8—2（A）中和K—map §8—2（B）图中，有四个单元，相同出现"1"，即（0000），（0100），（1100），（1000），按 $1\oplus1=0$，所以在K—map §8—2（C）中，这四个单元为0。

方法（五）：利用逻辑函数的K—map，求出其质异或形式。

这一方法的基本原理是：在K—map中每一个取“1”的单元，只允许圈奇数次，而对奇数个“1”进行逻辑“加”（＋）和进行异或运算“⊕”，所得的结果都为“1”，即

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2k+1}=\underbrace{1\oplus 1\oplus\cdots\oplus 1}_{2k+1}\qquad K=0,1,2,\cdots,n \quad K\geqslant 0\text{的整数}$$

步骤：

①把逻辑函 $F(X)$ 填入K—map。

②对K—map，$F(X)$ 的每一单元按照只能用奇数次进行分组（画圈）原则，即可将 $F(X)$ 转换为它的质异或形式。

③$F(X)$的质异或形式应用 § 1—2—1 至 § 1—2—6 性质，即可得到$\dfrac{dF(X)}{dx_i}$的结果。

例 1 $F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$

$$=(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4)\oplus(x_1\bar{x}_2x_3)$$

见图 § 8—3

$$\frac{dF(X)}{dx_1}=\frac{d(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}\oplus\frac{d(x_1\bar{x}_2x_3)}{dx_1}$$

$$=\bar{x}_1\left[\frac{d(x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}\right]\oplus(x_2\bar{x}_3x_4)\frac{d\bar{x}_1}{dx_1}\oplus\frac{d\bar{x}_1}{dx_1}\frac{d(x_2\bar{x}_3x_4)}{dx_1}$$

$$\oplus x_1\frac{d(\bar{x}_2x_3)}{dx_1}\oplus(\bar{x}_2x_3)\frac{dx_1}{dx_1}\oplus\frac{dx_1}{dx_1}\frac{d(\bar{x}_2x_3)}{dx_1}$$

$$=(x_2\bar{x}_3x_4)\oplus(\bar{x}_2x_3)$$

$$=(x_2\bar{x}_3x_4)\overline{(\bar{x}_2x_3)}+\overline{(x_2\bar{x}_3x_4)}(\bar{x}_2x_3)$$

$$=x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3$$

讨论：上面的例子K—map中（见图 § 8—3）每一个为“1”的单元都只有可能画一个圈，所以每一个“1”的单元，只有奇数个圈。对于有两个或两个以上的合并方向的单

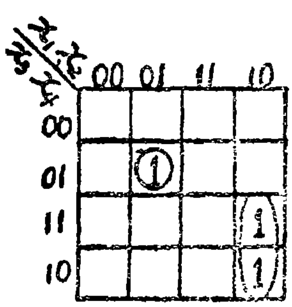


图 § 8—3

$F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3$

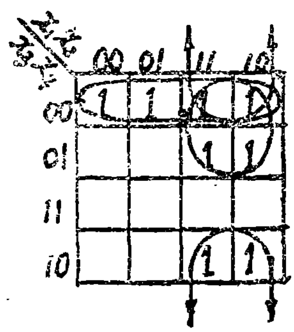


图 § 8—4

$F(X)=\bar{x}_3\bar{\ }_4+x_1\bar{x}_6+x_1\bar{x}_4$

元，特别要注意到画圈只允许奇数次。见图§ 8—4的例2 $F(X)=\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3+x_1\bar{x}_4$ 的最小项（1100），（1000），应有奇数次（三次）被画圈，而其他单元也应有奇数次（一次）。

例2：$F(X)=\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3+x_1\bar{x}_4$

$$=(\bar{x}_3\bar{x}_4)\oplus(x_1\bar{x}_3)\oplus(x_1\bar{x}_4)$$

$$\therefore \frac{dF(X)}{dx_1}=\frac{d(\bar{x}_3\bar{x}_4)}{dx_1}\oplus\frac{d(x_1\bar{x}_3)}{dx_1}\oplus\frac{d(x_1\bar{x}_4)}{dx_1}$$

$$=0\oplus x_1\frac{d\bar{x}_3}{dx_1}\oplus\bar{x}_3\frac{dx_1}{dx_1}\oplus\frac{dx_1}{dx_1}\frac{d\bar{x}_3}{dx_1}\oplus x_1\frac{d\bar{x}_4}{dx_1}\oplus\bar{x}_4\frac{dx_1}{dx_1}\oplus\frac{dx_1}{dx_1}\frac{d\bar{x}_4}{dx_1}$$

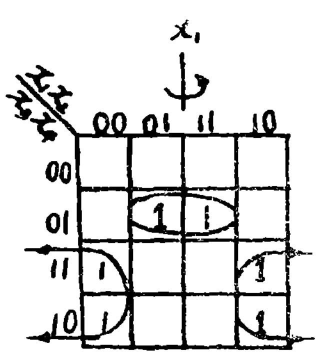
$$=\bar{x}_3\oplus\bar{x}_4=\bar{x}_3x_4+x_3\bar{x}_4$$

方法（六）：绕着 x_i 旋转求 $\frac{dF(X)}{dx_i}$

规则1：在 $F(X)$ 的K—map中，产生一个“1”：如果在图中产生的这个“1”是 $F(X)$ 对轴 x_i 的最小映象，同时产生的这个“1”所占用的单元不被 $F(X)$ 的一个“1”（最小项）所占用。〔如图§ 8—5（A）·（B）〕

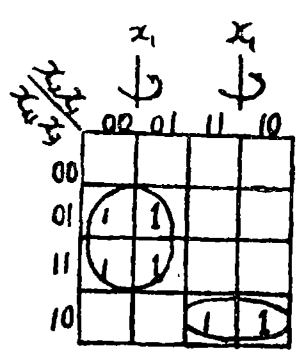
规则2：如果 $F(X)$ 对 x_i 轴的一个最小映象产生的“1”所占用的单元已被 $F(X)$ 的一个“1”（最小项）所占用，则将 $F(X)$ 的一个“1”（最小项）从图中删去。如例2图§ 8—6。

例1：$F(X)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_4$



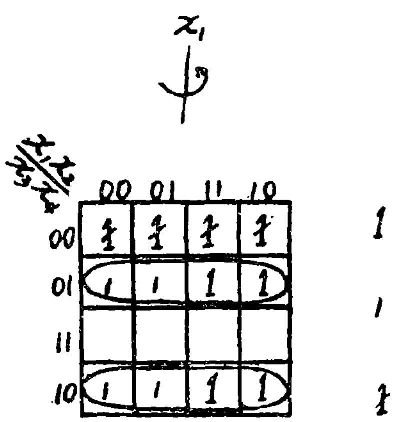
图§ 8—5（A）

$\frac{dF(X)}{dx_1}=x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3$



图§ 8—5（B）

$\frac{dF(X)}{dx_1}=x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3$



图§ 8—6

$\frac{dF(X)}{dx_1}=\bar{x}_3x_4+x_3\bar{x}_4$

说明：1 表示 $F(X)$ 的最小项，

1 表示被加上的 1，

王表示函数中的1被删去。

讨论：例1的K—map x_1 可能为一个轴，如图§ 8—5（A），也可能为两个轴如图§ 8—5（B），同样得到 $\dfrac{dF(X)}{dx_1}=x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3$

例2　$F(X)=\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3+x_1\bar{x}_4$

其中：（0000）、（0100）、（1000）、（1100）绕 x_1 轴产生的"1"所占用的单元已被 $F(X)$ 的最小项所占用而被删去。

$\therefore \dfrac{dF(X)}{dx_1}=\bar{x}_3x_4+x_3\bar{x}_4$　　如图§ 8—6

本文承蒙方志成副教授审阅，提出宝贵意见，并作文字上的修改。在此谨表衷心感谢。

参考文献

〔1〕李建勋著，罗银芳、刘启业译，数字电路与逻辑设计，科技出版社，（1981）.

〔2〕马绍汉，逻辑设计基础，山东科技出版社，（1980）.

〔3〕王镭，数字技术基础及应用，天津科技出版社，（1980）.

（4）Raymond M.Kline, Digital Computer Design, By Prentice—Hall,Inc.,（1977）.