应变圆与应力圆的直接变换

陈　云　惠

（土木工程系）

提　　要

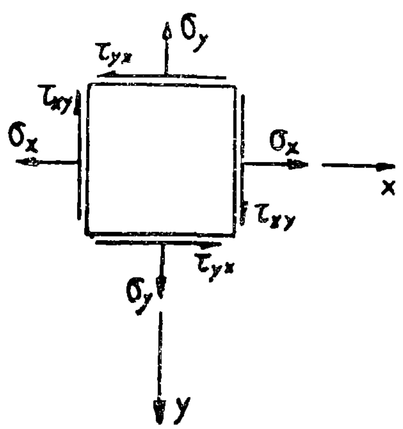
这里讨论的是，对于各向同性且小变形的弹性体的平面应力状态，通过广义虎克定律把应变圆与应力圆直接联系起来。得到的结论是，只要把应变圆的纵坐标轴作适当平移，同时采用新的比例尺系数，便可把移轴后的应变圆直接读为应力圆。

Ⅰ、自从德国学者O. *Mohr*于1882年发表应力圆方法以来，由于这种方法具有形象而简便的优点，它在应力分析中得到了广泛的使用。仿照应力圆的方法，一点处的应变状态也可以用被称为“应变圆”的方法来表示。但是，应力圆与应变圆历来是作为二个独立的图解法加以介绍和应用的，二者间未作直接的联系，而是要通过广义虎克定律来间接地换算的。

这里讨论的是，对于各向同性且小变形的弹性体的平面应力状态，通过广义虎克定律把应变圆与应力圆直接联系起来。得到的结论是，只要把应变圆的纵坐标（$\frac{\gamma}{2}$）轴作适当平移，同时采用新的比例尺系数，便可把移轴后的应变圆直接读为应力圆。

Ⅱ、公式推导

单元体的平面应力状态如图1*a*,所示，设其应力分量σ_x、σ_y和τ_{xy}为已知。则与σ_x的作用面夹角为α的斜截面上的正应力σ_α及剪应力τ_α（图1*b*,）的算式为[1]



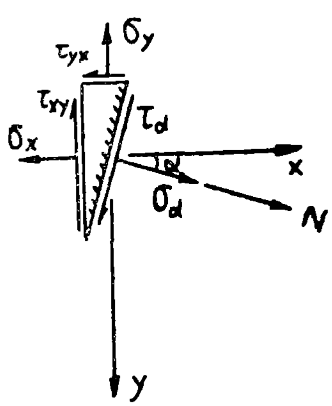


图　　1

$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha+2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha & (1)\\ \tau_\alpha=(\sigma_y-\sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) & (2)\end{cases}$$

如以τ为纵坐标，以σ为横坐标，则容易证明式（1）、式（2）在这平面坐标系$o\sigma\tau$上的关系曲线是一个圆，即应力圆（图2）。

设上述同一单元体的应变分量ε_x、ε_y和γ_{xy}为已知[2]。则与x方向夹角为α的线段的线应变ε_α及其互相垂直方向的剪应变γ_α的算式为

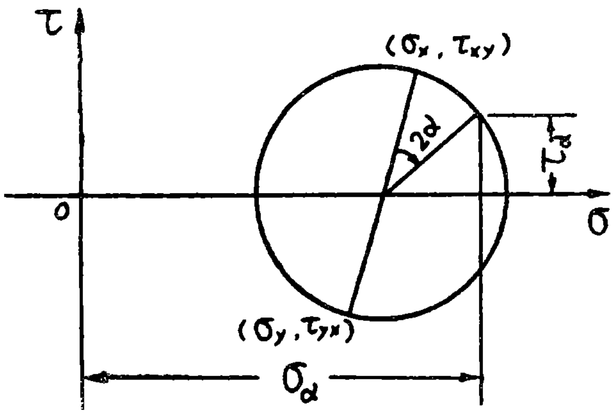


图 2

$$\varepsilon_\alpha=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\sin^2\alpha+2\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha \tag{3}$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2}=(\varepsilon_y-\varepsilon_x)\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\gamma_{xy}}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \tag{4}$$

如以$\left(\frac{\gamma}{2}\right)$为纵坐标，以$\varepsilon$为横坐标，则式（3）、式（4）在这平面坐标系$o\varepsilon\left(\frac{\gamma}{2}\right)$上的关系曲线也是一个圆，即应变圆（图3）。

对于各向同性且小变形的弹性体，其平面应力状态的广义虎克定律可写为

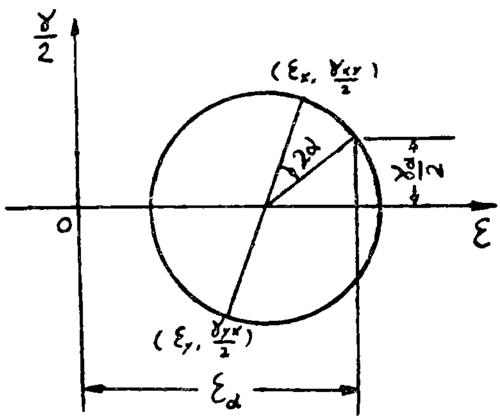


图 3

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中，E为材料的弹性模量；

μ为材料的泊松比；

G为材料的剪切弹性模量。

以式（5）代入式（1）：

$$\sigma_\alpha=\frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\cos^2\alpha+(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\sin^2\alpha\right]+\frac{2E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_x\cos^2\alpha+\mu\varepsilon_y(1-\sin^2\alpha)+\varepsilon_y\sin^2\alpha+\mu\varepsilon_x(1-\cos^2\alpha)\right]+$$

$$+\frac{E}{1+\mu}\gamma_{xy}\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

（1）采用“参考文献”第二章的规定，α以顺时针转向为正。

（2）平面应力状态会出现ε_z，但它不影响这里的分析，故不涉及。

$$=\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\sin^2\alpha+\gamma_{xy}\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right]$$

令 $$E_0=\frac{E}{1+\mu} \qquad (6)$$

$$a=\frac{2\mu}{1-\mu}\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\right) \qquad (7)$$

并注意到式（3），可得

$$\boxed{\sigma_\alpha=E_0(a+\varepsilon_\alpha)} \qquad (8)$$

同理，以式（5）代入式（2）：

$$\tau_\alpha=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_y(1-\mu)-\varepsilon_x(1-\mu)\right]\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$=\frac{E}{1+\mu}\left[(\varepsilon_y-\varepsilon_x)\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{\gamma_{xy}}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right]$$

注意到式（4）、式（6），可得

$$\boxed{\tau_\alpha=E_0\left(\frac{\gamma_\alpha}{2}\right)} \qquad (9)$$

式（6）表明E_0是与材料的弹性模量及泊松比有关的量，其意义是弹性模量E的折减值。式（7）表明 a是一个与材料的泊松比及应变圆圆心的横坐标$\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\right)$有关的量。对于给定点的平面应变状态来说，$a$是一个常量，与方向角α无关。

式（8）、式（9）告诉我们：当线应变ε_α加上一个a值后，此时“$\varepsilon_\alpha+a$与σ_α”及“$\frac{\gamma_\alpha}{2}$与τ_α”分别成正比关系，其比例系数均为$\frac{1}{E_0}$，就是说把原来应变圆图上的纵坐标（$\frac{\gamma}{2}$）轴平行移动一个a值，此时的坐标值$(\varepsilon+a,\frac{\gamma}{2})$放大$E_0$倍数后，这个圆就可直接读为应力圆（图4）。

简单地说，应变圆的（$\frac{\gamma}{2}$）轴平移后变为τ轴，ε轴变为σ轴，而原来的应变圆变为应力圆，只不过要用新的比例尺系数来度量应力值罢了。设应变圆的比例尺系数为 $n_{应变}$，则应力圆比例尺系数 $n_{应力}=E_0 n_{应变}$。

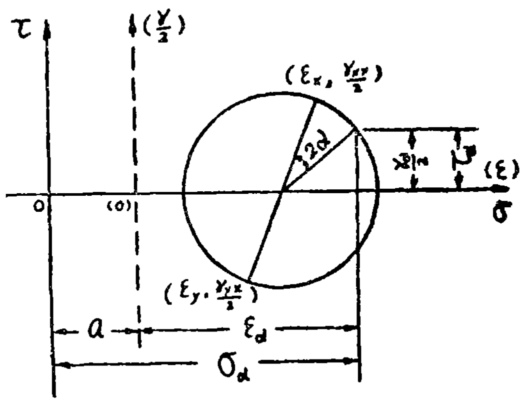


图　4

Ⅲ、实践表明，工程上大量问题符合各向同性、小变形的弹性体处于平面应力状态的条件。如上所述，在这些条件下，应变圆与应力圆间存在着简单的变换关系：应变圆和应力圆可以用同一个圆来表示，只不过二者的纵坐标轴的位置和坐标轴的刻度彼此不同而已。

符合上述条件的广义虎克定律形式上可简化为：$\sigma=E_0(a+\varepsilon)$ 和 $\tau=E_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)$，其关系线分别为图5$a$，$b$，$c$，和图6所示。

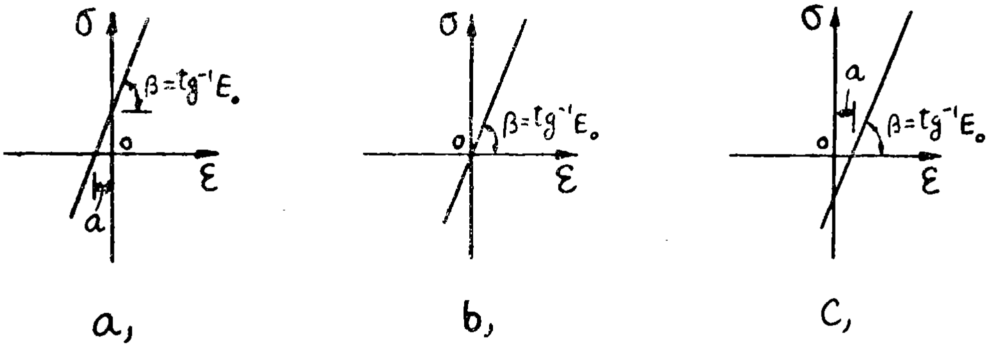


图 5

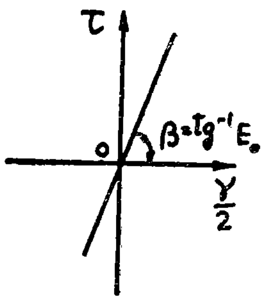


图 6

把应变圆和应力圆直接联系起来，在实际上的一个应用是：对于应变片电测数据的处理中，由测得的三个方向的应变值，可简便地画出应变圆，将其纵坐标平移后，即可视为应力圆。这样处理的优点是，判断主应力的方向及应力值随方向而变的全貌一目瞭然。

参 考 文 献

〔1〕铁摩辛柯、古地尔，弹性理论(中译本)，人民教育出版社，(1964)。