

# 变刚度框架-剪力墙结构

## 抗地震荷载剪力墙数量的优化分析

王 全 凤

(土木工程系)

### 摘 要

本文用微分方程法导出结构单元矩阵,根据相邻两个计算单元的协调条件建立截面矩阵。以结构基础的边界条件为初始值,通过传递矩阵从下而上传导到结构的顶部,再由其顶部边界条件求出第一单元位移及内力,从而求出考虑剪力墙剪切、弯曲变形时的结构变形和内力。文中介绍了用矩阵传导法形成柔度矩阵,用迭代法求结构的自振周期,以及等效地震荷载的换算。在表达了目标函数和约束条件的式子以后,建立了确定剪力墙最优数量的数学模型。最后用工程实例来说明本文的方法。

众所周知,有些建筑由于某些原因需要设计成变刚度的框架-剪力墙结构,而如何合理地确定此类结构剪力墙的数量,正是本文所要解决的问题。这里的变刚度指的是剪力墙的抗弯刚度和框架的剪切刚度呈阶梯形变化,这样可以人为地沿高度划分计算单元,使单元内剪力墙抗弯刚度和框架剪切刚度是常数,采用了矩阵传导法就可以求出所需截面处的变形和内力。一旦目标函数和约束条件的式子被表达以后,确定剪力墙最优数量的数学模型的建立就成为现实,

### 一、等刚度框架-剪力墙结构的协同工作

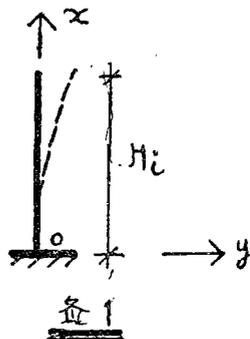
当假定楼板在其自身平面内的刚度为无穷大,并忽略结构的扭转变形时,框架-剪力墙结构在水平荷载下可按平面的等效框架-剪力墙结构来分析。取图-坐标系,根据同一高度  $x$  剪力墙承受的荷载  $q_w(x)$  与框架承受荷载  $q_F(x)$  之和应等于荷载  $q(x)$ , 得

$$q_w(x) = q(x) - q_F(x), \dots\dots (1)$$

$$\because Q_F(x) = Cy'(x), \dots\dots (2a)$$

$$\therefore q_F(x) = -Cy''(x), \dots\dots (2)$$

式中  $Q_F(x)$  —— 框架承受的剪力;  
 $C$  —— 框架平均剪切刚度。



把(2)式代进(1)式得

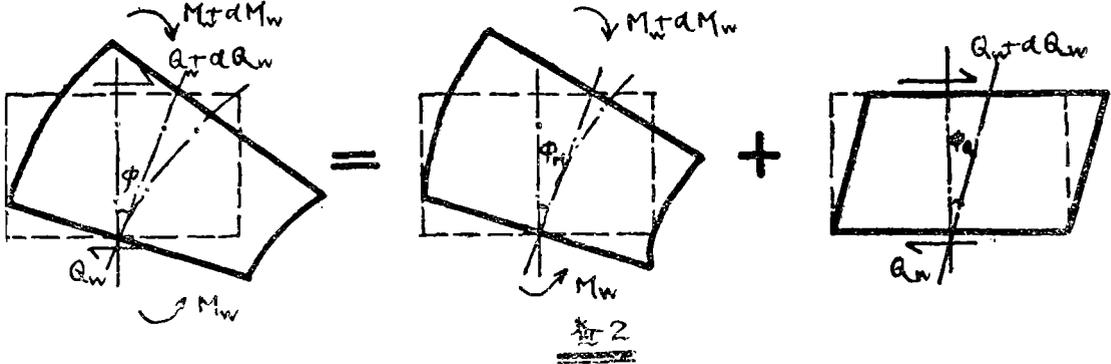
$$q_w(x) = q(x) + Cy''(x), \dots\dots (3)$$

积分上式

$$Q_w(x) = Q(x) - Cy'(x), \dots\dots (4)$$

式中  $Q(x)$ ——水平荷载产生剪力;  
 $Q_w(x)$ ——剪力墙承受剪力。

取剪力墙的微元体如图二



据叠加原理, 剪力墙的旋转角  $\phi$  应等于弯矩产生的转角  $\phi_M$  与剪力产生转角  $\phi_Q$  之和,

即

$$\phi = \phi_M + \phi_Q, \dots\dots (5)$$

$$\therefore \phi_Q = \frac{Q_w(x)}{GA_1/\mu}, \dots\dots (6)$$

式中  $G$ ——混凝土剪切弹性模量, 本文取  $G = 0.42E_w$ ;  
 $E_w$ ——混凝土弹性模量;  
 $A_1$ ——剪力墙断面的面积;  
 $\mu$ ——剪力墙断面剪力分布不均匀系数, 对矩形截面取  $\mu = 1.2$ 。

把(6)式代进(5)式微分

$$y''(x) = -\frac{M_w(x)}{B_w} - \frac{q_w(x)}{GA_1/\mu}, \dots\dots (7)$$

式中  $M_w(x)$ ——剪力墙承受弯矩;  
 $B_w$ ——剪力墙抗弯刚度之和。

再微分上式

$$y'''(x) = -\frac{Q_w(x)}{B_w} - \frac{q'_w(x)}{GA_1/\mu}, \dots\dots (8)$$

把(3), (4)式代进上式整理, 得

$$\frac{GA_1/\mu + C}{GA_1/\mu} y'''(x) - \frac{C}{B_w} y'(x) = -\frac{Q(x)}{B_w} - \frac{q'(x)}{GA_1/\mu}, \dots\dots (9)$$

令  $a = \frac{GA_1/\mu}{GA_1/\mu + C}$  ——剪力墙的剪切变形影响系数,

$$\lambda^2 = H_i^2 \frac{Ca}{B_w} \text{——框架-剪力墙结构的刚度特征值,}$$

式中  $H_i$ ——等刚度结构的高度。

则(9)式为

$$y''''(x) - \frac{\lambda^2}{H_i^2} y'(x) = - \frac{aQ(x)}{B_w} - \frac{aq'(x)}{GA_1/\mu}, \dots\dots\dots (10)$$

若  $q(x) = 0$ , 得在结构顶部作用集中荷载  $p$  的微分方程

$$y''''(x) - \frac{\lambda^2}{H_i^2} y'(x) = - \frac{ap}{B_w}, \dots\dots\dots (11)$$

令  $\xi = \frac{x}{H_i}$  方程通解

$$y(x) = d_1 + d_2 \operatorname{ch}(\lambda\xi) + d_3 \operatorname{sh}(\lambda\xi) + \frac{px}{C}, \dots\dots\dots (12)$$

则  $y'(x) = d_2 \cdot \frac{\lambda}{H_i} \cdot \operatorname{sh}(\lambda\xi) + d_3 \cdot \frac{\lambda}{H_i} \cdot \operatorname{ch}(\lambda\xi) + \frac{p}{C}, \dots\dots\dots (13)$

$$y''(x) = d_2 \frac{\lambda^2}{H_i^2} \operatorname{ch}(\lambda\xi) + d_3 \frac{\lambda^2}{H_i^2} \operatorname{sh}(\lambda\xi), \dots\dots\dots (14)$$

从方程(7)得

$$M_w(x) = - B_w \left[ y''(x) + \frac{q_w(x)}{GA_1/\mu} \right], \dots\dots\dots (15)$$

若仅在结构顶部作用一集中荷载  $p$ , 并把(3)式代进得

$$M_w(x) = - B_w \left[ y''(x) + \frac{Cy''(x)}{GA_1/\mu} \right] = - \frac{1}{a} B_w y''(x), \dots\dots\dots (16)$$

从参考文献[1]得知:

$$Q_w(x) = [Q(x) - C \cdot \phi_M] \cdot \frac{GA_1/\mu}{GA_1/\mu + C}, \dots\dots\dots (17)$$

代进(6)式得

$$\phi_0 = \frac{Q(x) - C\phi_M}{GA_1/\mu + C}, \dots\dots\dots (18)$$

对结构的底部  $\phi_M = 0$

$$\therefore \phi_0 = \frac{Q_0}{GA_1/\mu + C}, \dots\dots\dots (19)$$

式中  $Q_0$ ——结构底部剪力。

## 二、单元矩阵 A

图三表示由  $n$  个计算单元组成的阶梯型截面的剪力墙-框架结构,  $H$  是房屋的总高度。取图四所示任一计算单元  $i$ , 相应的  $H_i$  是单元的高度。



令  $\xi=0$  处,  $y=y_i^D, y'=\phi_i^D, M_w=-M_w^D$ , 从方程(12), (13)及(16)式得

$$\begin{cases} d_1+d_2=y_i^D \\ d_3 \frac{\lambda_i}{H_i} + \frac{p_i}{C_i} = \phi_i^D \\ -\frac{1}{a_i} B_{wi} d_2 \cdot \frac{\lambda_i^2}{H_i^2} = -M_w^D \end{cases} \dots\dots\dots (20)$$

解得

$$\begin{cases} d_1 = y_i^D - \frac{1}{C_i} M_w^D \\ d_2 = \frac{1}{C_i} M_w^D \\ d_3 = \frac{H_i}{\lambda_i} \left( \phi_i^D - \frac{p_i}{C_i} \right) \end{cases} \dots\dots\dots (21)$$

再令 在  $\xi=1$  处,  $y=y_i^S, y'=\phi_i^S, M_w=-M_w^S$ , 可求得单元  $i$  底部与顶部变形及内力关系

$$\begin{cases} y_i^S = y_i^D + \frac{H_i}{\lambda_i} \cdot sh\lambda_i \cdot \phi_i^D + \frac{1}{C_i} (ch\lambda_i - 1) \cdot M_w^D + \frac{p_i H_i}{C_i} \\ \cdot \left( 1 - \frac{sh\lambda_i}{\lambda_i} \right) \\ \phi_i^S = ch\lambda_i \cdot \phi_i^D + \frac{\lambda_i sh\lambda_i}{H_i C_i} M_w^D + \frac{p_i}{C_i} (1 - ch\lambda_i) \\ M_w^S = -\frac{C_i H_i}{\lambda_i} \cdot sh\lambda_i \cdot \phi_i^D + ch\lambda_i M_w^D - \frac{p_i H_i}{\lambda_i} sh\lambda_i \end{cases} \dots\dots\dots (22)$$

为了便于将式(22)用方阵表示, 可补充一个恒等式  $1=1$ , 而得

$$\{y\}_i^S = [A]_i \{y\}_i^D, \dots\dots\dots (23)$$

式中

$$[A]_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{H \cdot sh\lambda}{\lambda} & \frac{ch\lambda - 1}{C} & \frac{pH}{C} \left( 1 - \frac{sh\lambda}{\lambda} \right) \\ 0 & ch\lambda & \frac{\lambda \cdot sh\lambda}{CH} & \frac{p}{C} \cdot (1 - ch\lambda) \\ 0 & \frac{CH \cdot sh\lambda}{\lambda} & ch\lambda & -\frac{pH \cdot sh\lambda}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i$$

一单元矩阵;

$$\{y\}_i^S = \begin{Bmatrix} \phi \\ M_w \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{及} \quad \{y\}_i^D = \begin{Bmatrix} y \\ \phi \\ M_w \\ 1 \end{Bmatrix}$$

### 三、截面矩阵 [B] 及传递矩阵 [C]

根据计算单元  $i$  与计算单元  $i+1$  相邻截面变形及内力的协调关系

$$y_{i+1}^D = y_i^S; \phi_{i+1}^D = \phi_i^S; (M_w)_{i+1}^D = M_w^S; \text{写成}$$

矩阵形式

$$\{y\}_{i+1}^D = [B]_i \{y\}_i^S \dots\dots\dots (24)$$

式中  $[B]_i$  ——  $i$  单元的截面矩阵,  $[B]_i = [I]_i$  ;

$[I]$  —— 单位矩阵。

把 (23) 式代进 (24) 式得

$$\{y\}_{i+1}^D = [B]_i [A]_i \{y\}_i^D = [c]_i \{y\}_i^D \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{式中 } [c]_i \text{ —— } i \text{ 单元的传递矩阵, } [c]_i = [B]_i [A]_i = [A]_i \dots\dots\dots (26)$$

展开 (25) 式

$$\{y\}_2^D = [c]_1 \{y\}_1^D; \dots\dots\dots (27a)$$

$$\{y\}_3^D = [c]_2 \{y\}_2^D = [c]_2 [c]_1 \{y\}_1^D; \dots\dots\dots (27b)$$

$$\{y\}_{i+1}^D = [c]_i [c]_{i-1} \dots [c]_2 [c]_1 \{y\}_1^D; \dots\dots\dots (27)$$

### 四、边界条件

对于房屋底部  $y_1^D = 0; (\phi_M)_1^D = 0$ 。 ∴ 由 (19) 式得

$$\phi_1^D = \frac{Q_0}{GA_1/\mu + C} ;$$

写成矩阵形式

$\{y\}_1^D =$	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">1</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	·	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 0 10px;"><math>y</math></td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;"><math>\frac{Q_0}{GA_1/\mu + C}</math></td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;"><math>M_w</math></td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">1</td></tr> </table>	$y$	$\frac{Q_0}{GA_1/\mu + C}$	$M_w$	1	} $D$	$\dots\dots\dots (28)$
0	0	0	0																						
0	1	0	0																						
0	0	1	0																						
0	0	0	1																						
$y$																									
$\frac{Q_0}{GA_1/\mu + C}$																									
$M_w$																									
1																									

对于房屋顶部  $(M_w)_{n+1}^D = 0 \dots\dots\dots (28a)$

这样利用房屋顶部的边界条件, 据 (27) 式传导出  $\{y\}_1^D$ , 再求出各单元相邻截面处的变形及内力, 最后由式 (12)、(13)、(16)、(2a) 及 (4) 式求出任一截面处的变形和内力。

### 五、框架-剪力墙结构的自由振动

框架-剪力墙结构在振动时, 楼层间的错动使结构产生了剪切变形, 剪力墙的弯曲及边柱的轴向变形产生了结构的弯曲变形。震害的调查表明了, 在强烈地震作用下, 在刚度变化处普遍出现裂缝, 这是高振型影响和应力集中的结果, 因此对变刚度框架-剪力墙结构必须考虑高振型的影响。对高层建筑来说, 因为房屋的层数较多, 再加上影响振动因素也较多, 即使使用较精确的方法计算, 振动特性往往与实测有一定的距离, 因而按过细的计算简图进行复杂的计算意义不大。本文用集中质量法把框架-剪力墙结构模拟成为如图五所示的多质点弹性体系, 质量  $m_i$  的序号由下而上, 各段杆长为  $L_i$ , 抗侧移总刚度为  $B_i$ , 这样各质点的振动方程

$$y_i = -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{i,1} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{i,2} \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{i,n} \dots \dots \dots (29)$$

$$i = 1, 2, \dots \dots \dots n;$$

式中  $y_i, \ddot{y}_i$ ——分别为地震时质点  $i$  相对于地面的相对位移和相对加速度;

$\delta_{i,j}$ ——柔度系数, 即在  $j$  质点上作用一水平单位力时, 在  $i$  质点处产生的水平位移。

用单位荷载法求柔度系数  $\delta_{i,j}$ ,

当单位水平荷载作用在第一单元顶部时, 用上述矩阵传导法可求得  $\delta_{1,1}$ ; 当单位水平荷载作用在第二单元顶部时, 同上可求得  $\delta_{1,2}, \delta_{2,2}$ ; 依此类推, 当单位水平荷载作用在第  $n$  单元顶部时, 可求得  $\delta_{1,n}, \delta_{2,n} \dots \delta_{n,n}$ , 据位移互等定理

$$\delta_{ni} = \delta_{in} \quad ;$$

这样就形成了柔度矩阵

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad ;$$

用矩阵形式表示 (29) 式, 则有

$$[\delta][M]\{\ddot{y}\} + \{y\} = 0 \quad \dots \dots \dots (30)$$

式中

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & & & 0 \\ & m_{22} & & \\ & & m_{33} & \\ 0 & & & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{—质量矩阵}$$

设  $\{y\} = \{Y\} \cdot \sin(\omega t + \varepsilon)$ , 并令

$$[H] = [D] - \lambda_0 [I];$$

则上式为

$$[H]\{Y\} = 0 \quad ; \quad \dots \dots \dots (31)$$

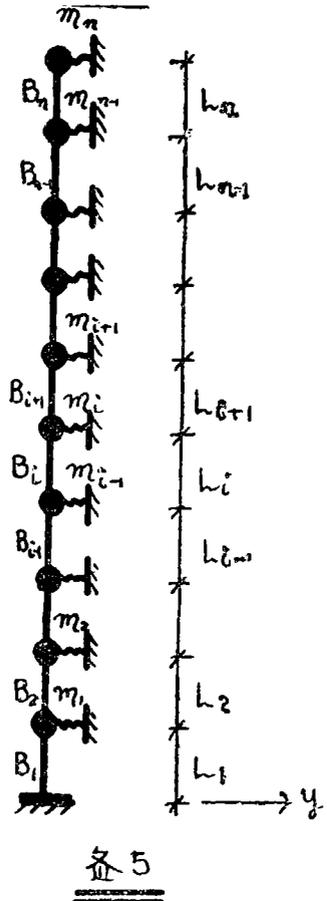
式中  $[D]$ ——特征矩阵,  $[D] = [\delta][M]$ ;

$$\lambda_0 \text{——结构振动特征值, } \lambda_0 = \frac{1}{\omega^2}; \quad \dots \dots \dots (32)$$

$\omega$ ——结构自振频率;

$\varepsilon$ ——初相角。

若体系发生振动,  $y_i$  不可能全部不动的必要及充分条件是 (31) 式系数行列式等于零, 从而得出频率方程



$$[H] = \begin{vmatrix} m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2\delta_{12} & \dots\dots\dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots\dots\dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots\dots\dots & m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

整理 (31) 式, 可得振型方程

$$[D]\{Y\} = \lambda_0\{Y\}; \dots\dots\dots (34)$$

本文用迭代法解方程 (34)。所谓迭代法, 就是假设一个其中有一个元素应为 1 的列向量  $\{Y\}^0$ , 代进 (34) 式左端右乘特征矩阵  $[D]$ , 得到第一次迭代近似值; 在第二次迭代准备中, 向量  $\{Y\}^1$  应先进行归一化处理, 再代进 (34) 式左端右乘特征矩阵  $[D]$ , 得到第二次迭代近似值; 重复上述步骤, 当迭代次数  $m$  足够多时, 我们会发现  $\{Y\}^m$  比  $\{Y\}^{m-1}$  大  $\lambda^0$  倍, 此时  $\lambda_0$  就是特征矩阵  $[D]$  的特征值, 而相应的向量  $\{Y\}^{m-1}$  就是基本振型向量。

若需求第二频率及其振型, 则可利用振型正交性, 建立一补充方程

$$\{Y_{i1}\}^T [M] \{y_i\} = 0; \dots\dots\dots (35)$$

展开 (35) 式, 将  $y_1$  用其它位移表达

$$y_1 = -\frac{m_{22}Y_{21}}{m_{11}Y_{11}}y_2 - \frac{m_{33}Y_{31}}{m_{11}Y_{11}}y_3 \dots - \frac{m_{nn}Y_{n1}}{m_{11}Y_{11}}y_n \dots\dots\dots (36)$$

将上式代进方程 (34) 式, 这些方程第一个将为剩余  $n-1$  个方程的线性组合, 这样方程组阶数就降低一次。为了对第二振型进行迭代而不缩减矩阵的大小, 我们把 (36) 式连同平凡关系  $y_2 = y_2, y_3 = y_3, \dots, y_n = y_n$  写成矩阵格式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \dots\dots\dots (37)$$

式中  $c_{1n} = -\frac{m_{nn}Y_{n1}}{m_{11}Y_{11}}$

$$\text{令 } [T]_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

因为它的功能是消除第一振型特性, 允许第二振型成为支配者, 故称为清除矩阵。用  $[T]_1$  右乘特征矩阵  $[D]$ , 我们得到第二振型特征矩阵  $[D]_1$ , 再按求第一频率的方法, 就可得到第二频率及其振型。

类似地, 要求第四频率及其振型, 应建立从初始迭代向量同时清除掉第一、第二、第三振型的条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \{Y_{i_1}\}^T \cdot [M] \{y_i\} = 0 \\ \{Y_{i_2}\}^T \cdot [M] \{y_i\} = 0 \\ \dots\dots\dots (38) \\ \{Y_{i_3}\}^T \cdot [M] \{y_i\} = 0 \end{array} \right.$$

得清除矩阵

$$[T]_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{34} & e_{35} & \dots & e_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

其中 
$$e_{3n} = -m_{nn}[(Y_{13}Y_{22} - Y_{12}Y_{23}) \cdot (Y_{12}Y_{n1} - Y_{11}Y_{n2}) - (Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}) \cdot (Y_{13}Y_{n2} - Y_{12}Y_{n3})] / \{m_{33} \cdot [(Y_{13}Y_{22} - Y_{12}Y_{23})(Y_{12}Y_{31} - Y_{11}Y_{32}) - (Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22})(Y_{13}Y_{32} - Y_{12}Y_{33})]\}; \dots\dots\dots (39)$$

同上，可求得第四频率及其振型。

因为迭代法收敛于最大特征值，所以用该方法解位移方程当迭代次数足够多时，可求得满意的结果。

### 六、目标函数 - 水平地震荷载

根据反应谱理论，作用在质点  $i$  的  $j$  振型水平地震荷载按下式确定：

$$p_i = C_0 \cdot \frac{D}{T_j} r_j Y_i W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (40)$$

式中  $C_0$ ——结构影响系数，本文取  $C_0 = 0.325$ ；

$D$ ——地震影响系数；

$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$ —— $j$  振型结构的自振周期；

$Y_i$ ——质点  $i$  在  $j$  振型时的相对水平位移；

$r_j = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i W_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 W_i}$ ——第  $j$  振型的振型参与系数；

$W_i$ ——集中在质点  $i$  的重量。

因为由反应谱理论确定的相应于各振型的  $p_{ij}$  均为最大的值，所以按  $p_{ij}$  计算的地震内力  $s_j$  也是最大值。但是，相应于各振型的最大地震内力  $s_j$  一般不会同时发生，这样就出现了如何进行振型组合，来确定结构的最大地震内力  $s$ 。

若假定地震时地面运动为平稳随机过程，利用概率论的方法得地震内力的组合

$$s = \sqrt{\sum_{j=1}^n S_j^2} \quad ; \quad \dots\dots\dots (41)$$

与上式地震内力相应的等效地震荷载需要通过内力换算而得。根据矩阵传导法，我们可

求得  $j$  振型时的各单元剪力墙承受弯矩  $(M_{wi})_j$ ，代进 (41) 式，可求得各单元剪力墙承受弯矩  $M_{wi}$ 。展开 (27a) 式

$$\begin{pmatrix} y \\ \phi \\ M_w \\ 1 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{H \cdot sh\lambda}{\lambda} & \frac{ch\lambda - 1}{C} & \frac{pH}{C} \left(1 - \frac{sh\lambda}{\lambda}\right) \\ 0 & ch\lambda & \frac{\lambda \cdot sh\lambda}{CH} & \frac{p}{C} (1 - ch\lambda) \\ 0 & \frac{CH \cdot sh\lambda}{\lambda} & ch\lambda & \frac{-pH \cdot sh\lambda}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \phi \\ M_w \\ 1 \end{pmatrix}^D \quad \dots(42)$$

其中第三个方程

$$\frac{C_1 H_1 \cdot sh\lambda_1}{\lambda_1} \phi_1^D + ch\lambda_1 \cdot M_{w1}^D - p_1 \frac{H_1 \cdot sh\lambda_1}{\lambda_1} = M_{w2}^D ; \quad \dots\dots\dots (43)$$

我们知道

$$\phi_1^D = \frac{p_1}{GA_1/\mu + C_1} ; \quad \dots\dots\dots (44)$$

联立解 (43)、(44) 式， $p_1$ 、 $\phi_1^D$  的值显然可得。

注意到第一单元底部  $y_1^D = 0$ ，把  $p_1$ 、 $\phi_1^D$  的值代进 (42) 式，可求得  $y_2^D$ 、 $\phi_2^D$ 。依此递推，不难求出所有的等效地震荷载及相应的位移量。

### 七、确定剪力墙最优刚度的数学模型

数学模型建立的方法见参考文献 [1]。此时数学模型

求 剪力墙有效刚度  $B_w$  (设计变量)，使得地震荷载 (目标函数) 为最小。并满足约束条件

$$\begin{cases} \text{位移约束} & \begin{cases} y_{max} \leq [y] \\ \delta_{max} \leq [\delta] \end{cases} \\ \text{几何约束} & \begin{cases} B_w \geq 0 \\ K_1 Q_{max} \leq 0.2 R_o \cdot t_1 (B_1 - t_1) \\ K_1 (Q_2)_{max} \leq 0.3 R_o \cdot b_{01} \cdot h_{01} \\ \sigma_o \leq 0.75 R_a \\ K_1 M_{max} \leq 0.4 R_w b_{02} h^2_{02} \end{cases} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (45)$$

- 式中  $y_{max}$ 、 $\delta_{max}$  —— 房屋最大水平与层间位移；
- $[y]$ 、 $[\delta]$  ——  $y_{max}$ 、 $\delta_{max}$  的允许值；
- $K_1$  —— 安全系数；
- $Q_{max}$  —— 每道剪力墙承受最大剪力；
- $R_o$ 、 $R_w$  —— 混凝土的抗压、抗弯设计强度；
- $t_1$ 、 $B_1$  —— 剪力墙的厚度与长度；

$(Q_s)_{max}$ ——最大的节点区剪力;

$b_{01}, b_{02}$ ——柱、梁的宽度;

$h_{01}, h_{02}$ ——柱、梁的高度;

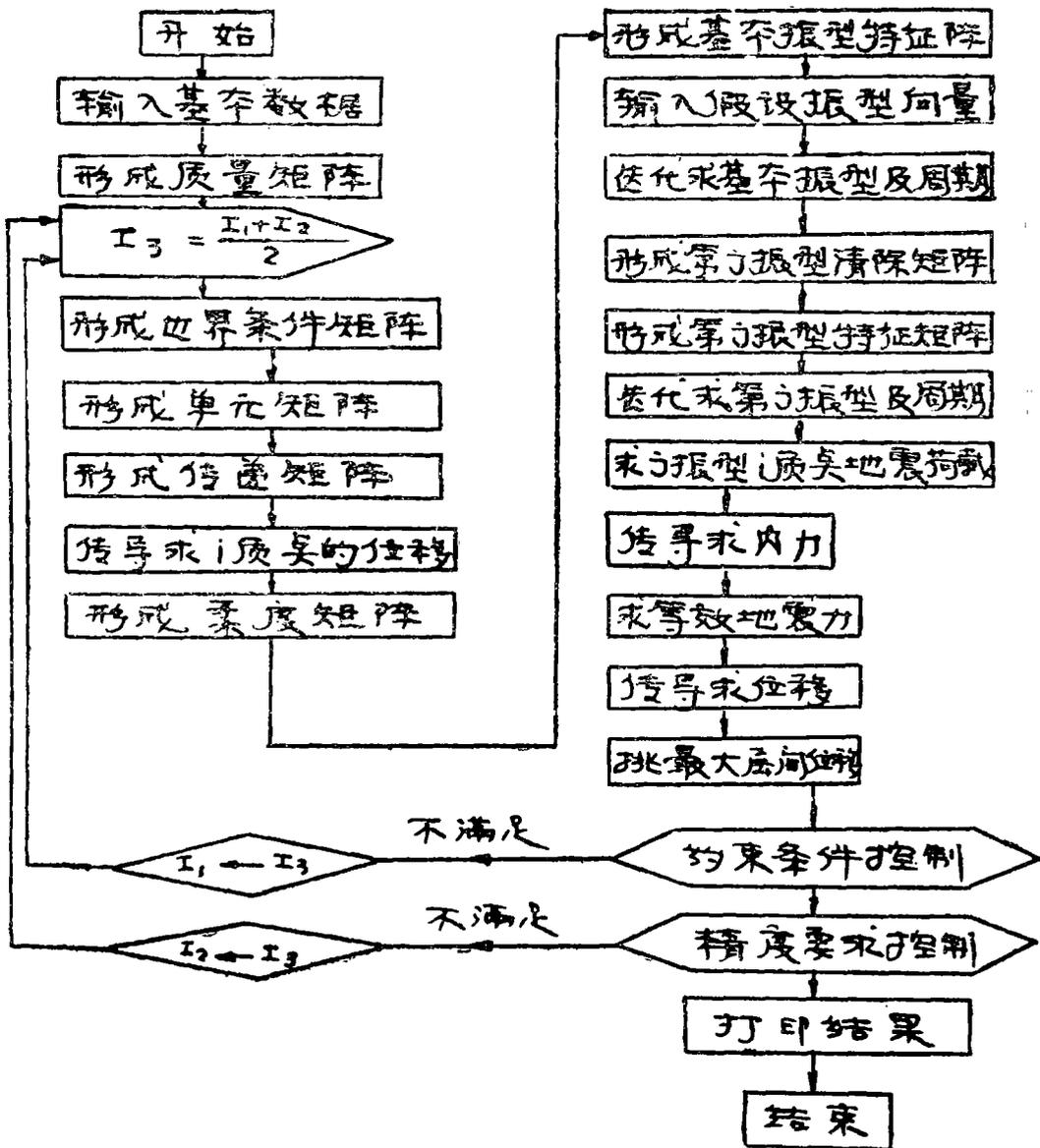
$\sigma_0$ ——柱的平均压应力;

$M_{max}$ ——框架梁承受最大弯矩。

显然解此数学模型, 需要运用电子计算机。

### 八、框图设计

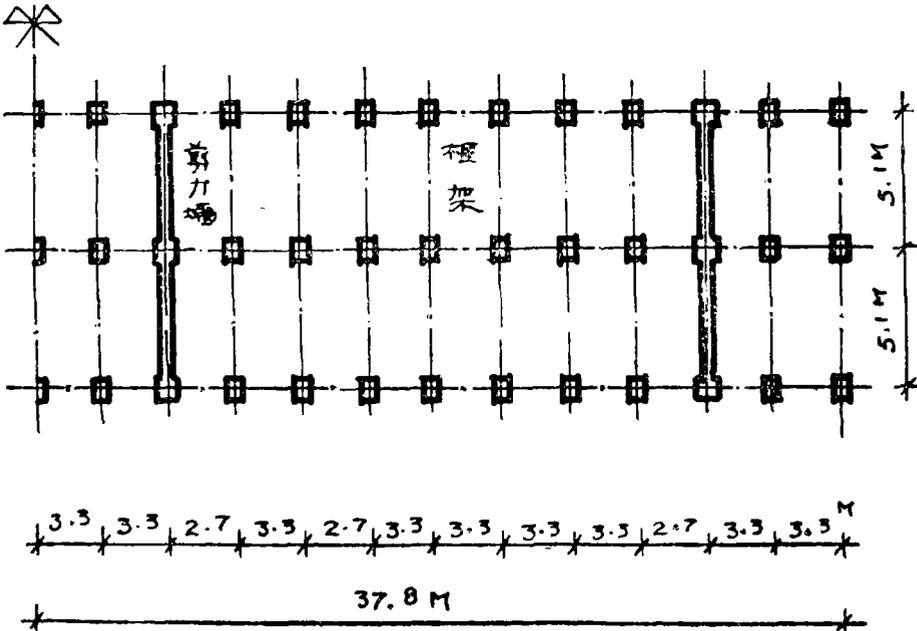
设  $I_1$  为不可行设计,  $I_2$  为可行设计,  $I_3 = \frac{I_1 + I_2}{2}$ 。程序框图如下:



注： $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  均为搜索过程中剪力墙惯性矩某一个量值。

### 九、工 程 实 例

某十四层高的板-柱体系框架-轻板住宅楼，建筑平面如图六。设计烈度8度，二类场地土；基础打桩，地基无转动；单位建筑面积上垂直荷载为 $600k_g$ ；屋高 $h=2.8$ 米，底层的层高为标准层的2倍；剪力墙断面为3阶变截面，2层及以下抗弯刚度为 $B_w$ ，3~8层为 $\frac{3}{4}B_w$ ，9~14层为 $\frac{9}{16}B_w$ ；框架柱截面尺寸 $40 \times 40$ 厘米<sup>2</sup>；混凝土标号：板、柱为300#，剪力墙为200#；楼板折算厚度为17.1厘米；位移控制条件 $[\frac{y}{H}] \leq \frac{1}{350}$ ， $[\frac{\delta}{h}] \leq \frac{1}{300}$ 。求在横向地震荷载作用下剪力墙最优惯性矩值



图(六)

从抗震角度考虑，剪力墙宜对称布置，即地震荷载中心与结构平面的刚度中心重合，这样可以把扭转因素减少到最低程度。

依题意剪力墙沿高度由3个阶组成，所以把结构沿高度分为7个计算单元，每2层为一个计算单元。在计算结构的自振周期 $T$ 时，可以把结构模拟成为有7个集中质量的弹性地基梁，柔度系数可由矩阵传导法求得。考虑到非承重砖墙的影响，周期折减系数取为0.8。输入基本数据：

$$C = 30596 \text{ 吨}; D = 0.135; C_0 = 0.325; H = 42 \text{ 米}$$

$$E_w = 2.6 \times 10^6 \text{ 吨/米}^2; G = 0.42 E_w; \mu = 1.2$$

运行据(45)式数学模型编制的计算程序，若考虑三个振型，求得最优解

$$I = 42.9858 \text{米}^4, \text{ 此时 } \frac{y_{max}}{H} = \frac{1}{437.3}, \quad \frac{\delta_{max}}{h} = \frac{1}{300.1}。$$

柔度矩阵

$$[\delta] = \begin{pmatrix} 0.768954 & 1.10548 & 1.4265 & 1.72638 & 2.00077 & 2.24598 & 2.46025 \\ & 2.31615 & 3.25812 & 4.13808 & 4.94324 & 5.66276 & 6.29152 \\ & & 5.47965 & 7.30395 & 8.97319 & 10.4648 & 11.7684 \\ & & & 10.8448 & 13.7212 & 16.2916 & 18.5378 \\ & & & & 18.865 & 22.8862 & 26.4002 \\ & \text{对} & \text{称} & & & 29.9265 & 35.0978 \\ & & & & & & 44.2098 \end{pmatrix} \times 10^{-6}$$

振型向量

$$\{Y_1\} = \begin{pmatrix} 1 \\ .845334 \\ .667444 \\ .487363 \\ .320103 \\ .177196 \\ .0721551 \end{pmatrix} \quad \{Y_2\} = \begin{pmatrix} 1 \\ .36680 \\ -.257847 \\ -.609954 \\ -.678121 \\ -.543442 \\ -.303294 \end{pmatrix} \quad \{Y_3\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -.228576 \\ -.668468 \\ -.236994 \\ .326139 \\ .599393 \\ .491068 \end{pmatrix}$$

自振周期

$$T_1 = 1.10073 \text{秒}; T_2 = .25639 \text{秒}; T_3 = .129757 \text{秒},$$

及其相应的内力(略)。

如果考虑四个振型, 求得  $I = 42.8882 \text{米}^4$ , 此时  $T_1 = 1.10179 \text{秒}; T_2 = .256697 \text{秒}; T_3 = .129934 \text{秒}; T_4 = .0924026 \text{秒}$ , 与上述的解答相比, 相对差值为 0.227%; 如果只考虑二个振型, 求得  $I = 39.6788 \text{米}^4$ , 此时  $T_1 = 1.09333 \text{秒}; T_2 = .254241 \text{秒}$ , 与上述三个振型的解答相比, 相对差值为 7.69%。从此例也可以看出, 如果结构质量分布较均匀, 仅考虑三个振型就足够了。

当然本文的方法也适用于等刚度框架 - 剪力墙结构, 如果此例剪力墙改为等刚度, 即同参考文献[1]的工程实例, 求得最优解是  $32.2054 \text{米}^4$ , 而用参考文献[1]的方法解此例得最优答案是  $31.54 \text{米}^4$ , 相对差值仅为 2.07%。

### 参 考 文 献

- [1] 王全凤、施士升, 框架 - 剪力墙 高层建筑结构抗地震荷载剪力墙数量的优化分析, 土木工程学报, 14, 3(1981), 1—12.
- [2] 刘开国, 杆系与板系结构的分析方法, 中国建筑工业出版社, (1980).
- [3] 江爱川, 建筑结构优化分析.
- [4] 武藤清, 耐震设计シリーズ I 耐震计算法, 丸善株式会社, (昭和38年).
- [5] 《地震工程概论》编写组, 地震工程概论, 科学出版社, (1977).
- [6] 王光远, 建筑结构的振动, 科学出版社, (1978).

- 
- [7] S. 铁摩辛柯, D.H. 杨, W. 小荻淳, 工程中的振动问题(中译本), 人民铁道出版社, (1978).
- [8] 王前信、王考信, 工程结构地震力理论, 地震出版社, (1979).
- [9] 《多层及高层房屋结构设计》编写组, 多层及高层房屋结构设计(上册), 上海科学技术出版社, (1979).
- [10] 北京建筑工程学院、南京工学院, 建筑结构抗震设计, 地震出版社, (1981).