

物质融熔状态热传导问题的摄动解

翁荣周 王秉安

(化学化工系)

提 要

本文用相对单位法将物理方程无量纲化,引出摄动参数 ste 数,从而得到了平板融熔状态下热传导问题的摄动解,并以 ste 数为参数进行了实例计算,所获结果可供储热器设计时参考。

符 号 说 明

a	导温系数
c_p	定压比热
Fo	<i>Fourier</i> 数, at/δ^2
K	导热系数
S	固液界面位置
Ste	<i>Stefan</i> 数, $C_p(T_o - T_f)/\lambda$
t	时间坐标
u	无因次温度, $-\theta/\theta_o$
x	距离坐标
X	无因次距离坐标, x/δ

希腊文

α	常数系数
δ	平板半厚度
ϵ	摄动参数, Ste 数
θ	剩余温度, $T - T_f$
λ	融化潜热
ξ	无因次分界层位置, s/δ
ρ	密度
τ	无因次时间, $\alpha t/\eta$
η	时间参数

下标

a	壁面
f	熔点
C	凝固终了时间

一、引 言

随着能源问题的严重性,太阳能由于具有巨大而又无污染等一系列特点^[1],愈来愈被人们所重视。但是,太阳能是周期性能源,因此储能问题十分重要,目前,利用物质发生相变的过程进行储能已得到应用,因此,研究这种具有相变过程的热传导问题具有重要意义。

在伴有相变的热传导过程中,随着热量的吸收和释放,固液界面位置随着时间不断移动,这个关系具有非线性特点,数学处理比较困难,故近似解具有很大的实用价值。

Goodman 和 Bitt^[2] 等人,用热边界层积分法,研究了无限大平板在各类边界条件下的解,文献[3],利用 Lighthill 方法,成功地研究了具有第三类边界条件的圆柱体凝固热传导问题。

自第二次世界大战后发展起来的摄动理论,在解决各种非线性问题方面取得了很大的成功,本文主要是根据文献[3]的基本思想,研究了具有第一类边界条件的相变热传导问题,并给出了几个数值计算结果,这对于平板式储热器的设计有一定参考价值的。

二、摄动方程的渐近表式达

考虑处于熔点 T_f , 厚度为 2δ 的熔融状态的平板,从时间 $t > 0$ 始液体从维持在温度 $T_0 < T_f$ 的两表面上移走热量而凝固,由于问题的对称性,只取平板的一半进行研究,此时置距离坐标方向由外表面向着板内,温度坐标沿着板外表面向上,这样平板相变热传导问题的数学模型如下:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < s \quad (1a)$$

$$\theta_s = T_0 - T_f \quad x = 0 \quad (1b)$$

$$\theta_s = 0 \quad x = s \quad (1c)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda \rho \frac{ds}{dt} \quad x = s \quad (1d)$$

$$\theta = 0 \quad S = 0 \quad t = 0 \quad (1e)$$

为了引出摄动参数,我们用相对单位法将(1)无量纲化,为此令:

$$u = \frac{\theta}{-\theta_s}, \quad x = \frac{x}{\delta}, \quad \xi = \frac{s}{\delta}, \quad \tau = \frac{at}{\eta} \quad (2)$$

这里无因次时间 τ 含有一常数系数 a , 以便引出摄动参数,如此,将(2)代入(1),便有:

$$\frac{a}{F_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad (3a)$$

$$u = -1 \quad x = 0 \quad (3b)$$

$$u = 0 \quad x = \xi \quad (3c)$$

$$\frac{1}{\alpha} F_0 Ste \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\tau} \quad x = \xi \quad (3d)$$

$$u = 0, \quad \xi = 0 \quad \tau = 0 \quad (3e)$$

由(3)看出, 若 $\alpha = F_0 \cdot ste$, 並如同文献^[3]取 $ste = \varepsilon$ 为摄动参数, 则(3)便可以改写成如下形式:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad 0 < x < 1 \quad (4a)$$

$$u = -1 \quad x = 0 \quad (4b)$$

$$u = 0 \quad x = \xi \quad (4c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\tau} \quad x = \xi_0 \quad (4d)$$

$$u = 0, \quad \xi = 0 \quad \tau = 0 \quad (4e)$$

(4)式便是描写第一类边界条件, 平板热传导问题的摄动方程。

下面我们来求解摄动方程(4), 为此令:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (5a)$$

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \dots \quad (5b)$$

将(5)代入(4), 并使等式两边 ε 的同次幂系数相等, 得到决定 u, ξ 各项近似的一系列方程:

ε^0 :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (6a)$$

$$u_0 = -1 \quad x = 0 \quad (6b)$$

$$u_0 = 0 \quad x = \xi_0 \quad (6c)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{d\xi_0}{d\tau} \quad x = \xi_0 \quad (6d)$$

$$u_0 = 0, \quad \xi_0 = 0 \quad \tau = 0 \quad (6e)$$

ε^1 :

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad (7a)$$

$$u_1 = 0 \quad x = 0 \quad (7b)$$

$$u_1 + \xi_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad x = \xi_0 \quad (7c)$$

$$\xi_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{d\xi_1}{d\tau} \quad x = \xi_0 \quad (7d)$$

$$u_1 = 0, \quad \xi_1 = 0 \quad \tau = 0 \quad (7e)$$

由(6)容易求得:

$$u_0 = -\frac{1}{\xi_0} x - 1 \quad (8)$$

$$\tau = \frac{\xi_0^2}{2} \quad (9)$$

为了求 u_1 , 将(8)对 τ 求偏导, 代入(7a), 并由(7b), (7c)可求得

$$u_1 = -\frac{1}{\xi_0^3} \frac{x^3}{6} + \left(\frac{1}{6\xi_0} + \frac{\xi_1}{\xi_0^2} \right) x \quad (10)$$

将(10)代入(7d)得:

$$-\frac{1}{3\xi} - \frac{\xi_1}{\xi_0^2} = \frac{d\xi_1}{d\tau} \quad (11)$$

但

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \frac{d\xi_1}{d\xi_0} \frac{d\xi_0}{d\tau}$$

又由(6d)知

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{\xi_0}$$

将这些代入(11), 得:

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_0} + \frac{\xi_1}{\xi_0} + \frac{1}{3} = 0$$

解之, 並考虑(7e)得:

$$\xi_1 = \frac{\xi_0}{6}$$

三、计 算 实 例

本文以 $Ste = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5$ 为例通过 TRS-80 微型机进行数值计算。图1—4绘出了计算结果, 其中图1表示在不同 ε 下, 凝固终了时, 无因次温度 u 和距离坐标的关系。

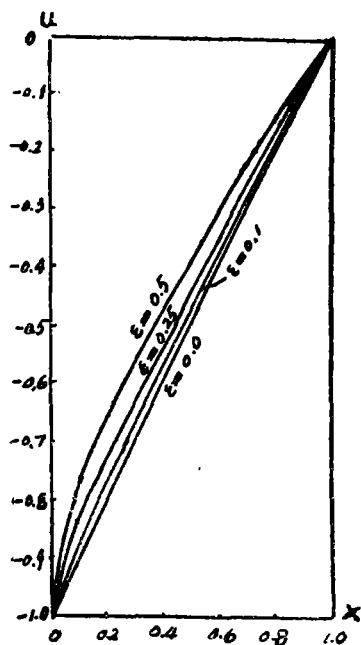


图1 凝固时的 $u-x$ 的关系曲线

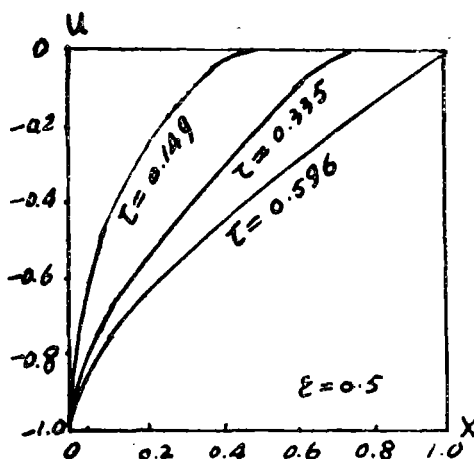


图2 凝固的不同时刻的
 $u-x$ 的关系曲线

图 3 给出了在不同 ε 下, 固液界面位置和时间的关系曲线。

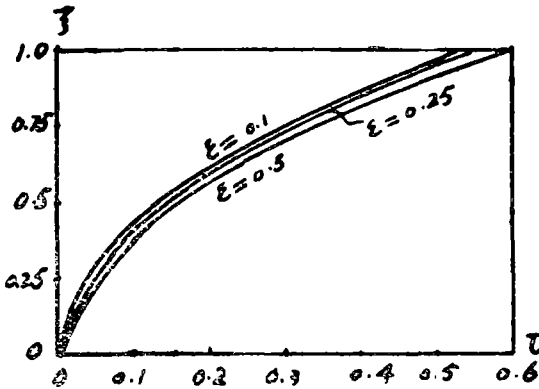


图 3 $\xi-\tau$ 的关系曲线

图 4 给出了凝固终了时, 凝固总时间 τ_c 随 ε 的变化曲线。

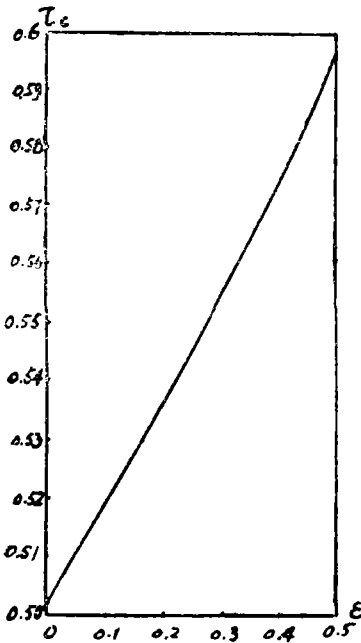


图 4 $\tau_c-\varepsilon$ 的关系曲线

图1--4是对四种 Ste 数进行计算的结果, 它可以作为大多数这种储热器的热工计算时的参考, 上述有关计算机求解的打印从略。

参 考 文 献

(1) 杨翔翔、翁荣周、王秉安, 太阳能与能源问题, 华侨大学学报, 1(1982), 68—75.
(2) Eckert, E. C, Analysis of Heat and Mass Transfer, (1972), 228—236.
(3) 宋又玉, 用奇异摄动法解圆柱体的凝固问题, 工程热物理学报, 2, 4(1981).