

# 非一致二阶线性抛物型方程广义解的 弱最大值原理

梁学信

(华侨大学)

梁汲廷

(中山大学)

吴在德

(天津师范专科学校)

于鸣岐

(山西大学)

在[1—3]中对非一致二阶椭圆型方程作了许多讨论。特别是,由于 *Trudinger* 的工作<sup>[1-2]</sup>, 在相当广泛的条件下, 解的唯一性定理成立, 并且当一个类似于下面的条件(13), (14)满足时, 解的弱最大值原理成立。本文则要证明非一致抛物型方程广义解的弱最大值原理成立。

设  $G$  是  $E^n$  中的有界区域,  $T$  为有限, 记  $Q = G \times (0, T)$ , 设  $a^{\alpha\beta}(x, t) = a^{\beta\alpha}(x, t)$  在  $Q$  可测并满足如下条件:

$$0 < \lambda(x, t) |\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x, t) \xi^\alpha \xi^\beta \leq \mu(x, t) |\xi|^2, \quad (1)$$

$$\forall (x, t) \in Q, \quad \xi \in E^n,$$

其中  $\lambda^{-1}(x, t) \in L_{l^*}(Q)$ , 
$$l^* > n + 2 - \frac{5}{2(n+1+\sqrt{n^2+6n+4})} \quad (2)$$

$$\mu(x, t) \in L_s(Q), \quad \frac{1}{s} + \frac{2}{l} < 1 \quad \left( \text{即 } \frac{1}{s} + \frac{1}{l^*} < \frac{2}{n+m}, \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+m}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{l^*} \right). \quad (4)$$

泛函空间  $V(Q)$  是  $C^1$  类函数在下述范数下完备化作成的线性空间:

$$\|u\|_{V(Q)} = \left( \int_0^T \int_G \left( u_t^2 + a^{\alpha\beta}(x, t) u_{,\alpha} u_{,\beta} + \mu(x, t) u^2 \right) dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中  $u_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} u$ ,  $u_{,\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} u$ .  $\dot{V}(Q)$  是  $V(Q)$  的子空间,  $\dot{V}(Q)$  中的函数在 *Соболев* 意义

下满足下列边界条件 ( $\partial G$  记  $G$  的在  $E^n$  中的边界):

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in G; \quad (5)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial G, \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

引理 设  $u \in \dot{V}(Q)$ , 那么  $u \in L_l(Q)$  并且存在常数  $C > 0$  与  $u$  无关, 使

$$\left( \int_0^T \int_G |u(x,t)|^l dx dt \right)^{2/l} \leq C \left\{ \int_0^T \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\alpha} u_{,\beta} dx dt + \sup_{t \in (0,T)} \int_G u^2(x,t) dx \right\}. \quad (7)$$

证: 首先由 Hölder 不等式, 给出

$$\left( \int_0^T \int_G |\nabla_x u|^n dx dt \right)^{1/m} \leq \left( \int_0^T \int_G \lambda^{-t^*}(x,t) dx dt \right)^{1/2t^*} \left( \int_0^T \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\alpha} u_{,\beta} dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$|\nabla_x u| \equiv (u_{,\beta}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

其次, 考虑到  $u$  满足条件 (6),  $u$  于是对几乎所有的  $t \in (0, T)$  属于  $\dot{W}_m^1(G)$ ,  $\dot{W}_m^1(G)$  是通常的 Соболев 空间。置  $l = mk$ , 那么  $k = 1 + m/n$ 。由 Соболев 嵌入定理

$$\int_G |u|^l dx = \int_G |u|^{nk} dx \leq \left( \int_G |u|^n dx \right)^{k-1} \int_G |\nabla_x u|^n dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} \left( \int_0^T \int_G |u|^L dx dt \right)^{1/l} &\leq \left( \int_0^T \int_G |\nabla_x u|^n dx dt \right)^{1/mk} \left[ \sup_{t \in (0,T)} \left( \int_G |u|^n dx \right)^{1/m} \right]^{(1-1/k)} \\ &\leq \left[ \|\lambda^{-1}\|_{L^{\frac{1}{2t^*}}(Q)}^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\alpha} u_{,\beta} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{1/k} \\ &\quad \times \left[ \text{mes}^{-\frac{1}{m} - \frac{1}{2}} G \left( \int_G u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{1-1/k}. \end{aligned}$$

然后由 Young 不等式, 即得结论 (7)。证讫。

定理 设  $u \in V(Q)$  满足下面的方程

$$\int_0^t \int_G \left\{ v u_t + v_{,\alpha} (a^{\alpha\beta}(x,t) u_{,\beta} + b^{\alpha}(x,t) u + f^{\alpha}(x,t)) + v (C^{\alpha}(x,t) u_{,\alpha} + d(x,t) u + f_0(x,t)) \right\} dx dt = 0, \quad (8)$$

$$\forall t \in (0, T), \quad v \in \dot{V}(Q).$$

其中  $a^{\alpha\beta}(x,t) = a^{\beta\alpha}(x,t)$  满足条件 (1);

$$b^{\alpha}(x,t), C^{\alpha}(x,t) \in L_r(Q), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{1}{m} + \frac{1}{l} = \frac{1}{s} - \frac{1}{n+m} \quad (9)$$

$$d(x,t) \in L_r(Q); \quad (10)$$

$$f_0(x,t) \in L_p(Q), \quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{l}; \quad (11)$$

$$f^{\alpha}(x,t) \in L_q(Q), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{m} + \frac{1}{l} = 1 - \frac{1}{m}. \quad (12)$$

再补充假定下列条件成立:

① 当  $S \geq n+m$  时,  $r = \infty$

$$\int_0^t \int_G (v_{,a} b^a(x,t) + v d(x,t)) dx dt \geq 0, \quad (13)$$

$$\int_0^t \int_G (v_{,a} f^a(x,t) + v f_0(x,t)) dx dt \geq 0, \quad (14)$$

$$\forall t \in (0, T), v \in \dot{V}(Q), v \geq 0.$$

那么如果存在常数  $M > 0$  使

$$u_M^+ = \max(u - M, 0) \in \dot{V}(Q), \quad (15)$$

则

$$u \leq M, \text{ 在 } Q \text{ 内}. \quad (16)$$

证: 设  $u$  是定理中的函数, 如果断言(16)不真, 那么存在

$$k_0 = \sup_Q u > M \quad (17)$$

和  $M < k \leq k_0$  使  $A(k) = \text{mes}\{u > k\} > 0$ . 在(8)中取  $v = \max(u - k, 0) \in \dot{V}(Q)$ , 给出

$$0 \geq \frac{1}{2} \int_G v^2 dx + \int_0^t \int_G (a^{\alpha\beta}(x,t) v_{,\alpha} v_{,\beta} + c^\alpha(x,t) v v_{,\alpha}) dx dt.$$

$$\text{由此 } \frac{1}{2} \sup_{t \in (0, T)} \int_G v^2 dx + \int_0^t \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) v_{,\alpha} v_{,\beta} dx dt \leq \int_0^t \int_G |c^\alpha(x,t) v v_{,\alpha}| dx dt$$

$$\leq \|c^\alpha(\cdot, t)\|_{L^r(Q)} \|v\|_{L^l(Q)} \left( \int_0^t \int_G |\nabla_x v|^m dx dt \right)^{1/m} (A(k))^K,$$

$$K = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{m} - \frac{1}{l} > 0$$

$$\left\{ \sup_{t \in (0, T)} \int_G v^2 dx + \int_0^t \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) v_{,\alpha} v_{,\beta} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \|v\|_{L^l(Q)} (A(k))^K \quad (18)$$

其中  $C_1 > 0$  是不依赖于  $v, k$  的常数. 根据(18), 利用引理, 即得

$$\|v\|_{L^l(Q)} \leq c c_1 \|v\|_{L^l(Q)} (A(k))^K.$$

这表明  $A(k) \geq (c c_1)^{-1/K} > 0$ , 于是, 命  $k \rightarrow k_0$ . 取极限即见函数  $u$  在  $Q$  内某个正测度集上达到它的上确界  $k_0$ .

另一方面, 如取

$$v = \frac{2v_0}{(M - k_0)^2 + \varepsilon - v_0^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad v_0 = u_M^+ = \max(u - M, 0) \in \dot{V}(Q)$$

由(8)即得

$$0 \geq \int_0^t \int_G \frac{(v_0^2)_t}{(M - k_0)^2 + \varepsilon - v_0^2} dx dt + \int_0^t \int_G \left( \frac{2}{(M - k_0)^2 + \varepsilon - v_0^2} + \frac{4v_0^2}{[(M - k_0)^2 + \varepsilon - v_0^2]^2} \right) a^{\alpha\beta}(x,t) v_{,\alpha} v_{,\beta} dx dt + \int_0^t \int_G \frac{2v_0 v_{0,a} C^\alpha(x,t)}{(M - k_0)^2 + \varepsilon - v_0^2} dx dt.$$

从而

$$\int_G \omega_2 dx + \int_0^t \int_G a^{\alpha\beta}(x,t) \omega_{2,\alpha} \omega_{2,\beta} dx dt \leq \int_0^t \int_G |C^\alpha(x,t) \omega_{2,\alpha}| dx dt$$

$$\leq \|C^a(x, t)\|_{L_r(Q)} \left( \int_0^t \int_G |\nabla_x \omega_\varepsilon|^m dx dt \right)^{1/m} \text{mes}^\eta Q,$$

$$\leq C \int_0^t \int_G a^{\alpha\beta}(x, t) \omega_{\varepsilon, \alpha} \omega_{\varepsilon, \beta} dx dt \Big)^{1/2} \text{mes}^\eta Q,$$

其中

$$\omega_\varepsilon = \ln \frac{(M - k_0)^2 + \varepsilon}{(M - k)^2 + \varepsilon - v_0^2} > 0, \quad \eta = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{m},$$

常数  $C > 0$  是不依赖于  $\omega_\varepsilon$ ,  $t$  的常数。于是

$$\int_G \omega_\varepsilon dx + \int_0^t \int_G a^{\alpha\beta}(x, t) \omega_{\varepsilon, \alpha} \omega_{\varepsilon, \beta} dx dt \leq (C \text{mes}^\eta Q)^2.$$

命  $\varepsilon \rightarrow 0$  取极限, 由上式即见  $\omega = \ln \frac{(M - k_0)^2}{(M - k_0)^2 - v_0^2}$  在  $G$  以及  $Q$  为可积。因而  $v_0$  只可能在零

测度集上等于  $k_0 - M$ , 亦即  $u$  只可能在零测度集上达到它的上确界  $k_0$ , 这和前面关于上确界的结论矛盾! 定理于是得证。

### 参 考 文 献

- [1] Trudinger, N.S., Maximum principles for linear non-uniformly elliptic operators With measurable Coefficients, Math.Zeit., 156(1977), 291-310.
- [2] Trudinger, N. S., Linear elliptic operators With measurable Coefficients, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 27(1973), 265-308.
- [3] Кружков, С. Н., Априорные оценки и Некоторые свойства решений Эллиптических и Параболических Уравнений, Матм.Сборник, 65, 107(1964), 522-579.