

高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动(Ⅱ)

郑永树 倪守平

(华侨大学) (福建师范大学)

一、引言

在文[2]中,我们研究了方程含双参数的 $2(m+l)$ 阶线性椭圆型方程的第一边值问题 $\Delta \varepsilon, \mu$:

$$L\varepsilon, \mu W\varepsilon, \mu \equiv \varepsilon^{2l} L_{2l} W\varepsilon, \mu + \sum_{r=1}^{2l-1} \mu' L_r W\varepsilon, \mu + L_0 W\varepsilon, \mu = f(x), \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial^s W\varepsilon, \mu}{\partial n^s} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (s=0, 1, \dots, m+l-1) \quad (1.2)$$

在 $\mu/\varepsilon \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)$ 情况下的奇摄动,即构作出摄动问题(1.1)、(1.2)包含双参数的渐近解,并给出余项的估计。本文将继续讨论当 $\varepsilon/\mu \rightarrow 0 (\mu \rightarrow 0)$ 的情况。

上述式中, ε, μ 表示相互依赖的正小参数, $0 < \varepsilon \ll 1, 0 < \mu \ll 1$, Ω 为 n 维欧氏空间 R^n 中的有界区域, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界,并假设 $\partial\Omega$ 是足够光滑的, n 表示 $\partial\Omega$ 的内法线向量, L_0 表示 $2m$ 阶线性强椭圆型算子:

$$L_0 \omega \equiv \sum_{|\beta| \leq 2m} C_\beta(x) D^\beta \omega \equiv \sum_{h=0} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = h} C_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n} \omega, \quad (1.3)$$

式中

$$(-1)^m \sum_{|\beta| = 2m} C_\beta(x) \xi^\beta \geq a_0 |\xi|^{2m}, \quad (1.4)$$

L_{2l} 表示 $2(m+l)$ 阶线性强椭圆算子:

$$L_{2(m+l)} \omega \equiv \sum_{|\beta| \leq 2(m+l)} a_\beta D^\beta \omega \equiv \sum_{h=0}^{2(m+l)} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = h} a_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n} \omega, \quad (1.5)$$

式中

$$(-1)^{m+l} \sum_{|\beta|=2(m+l)} a_\beta(x) \xi^\beta \geq \alpha_1 |\xi|^{2(m+l)}, \quad (1.6)$$

其中 α_0, α_1 是正的常数; L_r 表示 $2m+r$ 阶线性偏微分算子;

$$\begin{aligned} L_r \omega &\equiv \sum_{|\beta| \leq 2m+r} b_{r,\beta}(x) D^\beta \omega \\ &\equiv \sum_{|\beta| = k}^{2m+r} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = k} b_{r,\beta_1 \dots \beta_n}(x) D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n} \omega, \end{aligned} \quad (1.7)$$

($r = 1, 2, \dots, 2l-1$)

以上其余记号与[1]中的相同。

当 $\varepsilon = 0, \mu = 0$ 时, 摄动问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 退化为非摄动(退化)问题 A_0 :

$$L_0 \omega_{0,0} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{\partial^s \omega_{0,0}}{\partial n^s} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (s = 0, 1, \dots, m-1) \quad (1.9)$$

我们将仿照文[2]的做法, 通过在 Ω 上求一系列由 $2m$ 阶线性椭圆型算子 L_0 所确定的第一边值问题的解, 并相应地在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 邻域内构造边界层函数, 得到摄动问题的形式渐近解, 并对其余项给出估计式。

二、形式渐近解

我们仍援用 Люстерник-Вайнштейн^[3]方法构造摄动问题的形式渐近解。类似于文[2]的做法, 所构造问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 的渐近解为如下形式:

$$\omega_{\varepsilon, \mu}(x) = \omega_{\varepsilon, \mu}^N(x) + \mu^m v_{\varepsilon, \mu}^{N1}(t, \varphi) + Z_N(x, \varepsilon, \mu), \quad (2.1)$$

式中

$$\omega_{\varepsilon, \mu}^N(x) = \sum_{p=0}^N \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{p-j} \mu^j \omega_{p-j,j}(x) \quad (2.2)$$

$$v_{\varepsilon, \mu}^{N1}(t, \varphi) = \sum_{p=0}^N \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{p-j} \mu^j v_{p-j,j}(t, \varphi) \quad (2.3)$$

($t = \rho/\mu$, (ρ, φ) 为下面将引入的局部坐标)

下面将由迭代法依次求出(2.2)–(2.3)式中的各个函数。其中 $\omega_{\varepsilon, \mu}^N(x)$ 由方程(1.1)的算子 $L_{\varepsilon, \mu}$ 确定, $v_{\varepsilon, \mu}^{N1}(t, \varphi)$ 将由下面关于算子 $L_{\varepsilon, \mu}$ 的分解算子确定。 $Z_N(x, \varepsilon, \mu)$ 是误差项。为此, 将求解过程分为以下两步。

(一) 第一迭代过程

首先, 我们导出确定(2.2)式右边各个函数的迭代方程。把 $\omega_{\varepsilon, \mu}^N(x)$ 作为在整个区域 Ω 上求解, 于是把(2.2)右边代入方程(1.1)并比较关于 ε/μ 和 μ 的同幂次的系数, 得到递推方程:

$$L_0 \omega_{0,0} = f(x) \quad (2.4)$$

$$L_0 \omega_{p-j,j} = - \sum_{r=1}^{2l-1} L_r \omega_{p-j,j-r} - L_{2l} \omega_{p-j-2l,j-2l} \quad (2.5)$$

$$(j=0, 1, \dots, p; p=1, 2, \dots, N)$$

在(2.5)式及以后的计算中, 都将负下标的量取作零。

(二) 第二迭代过程

先对微分算子 $L_{\varepsilon, \mu}$ 在边界 $\partial\Omega$ 的邻域进行分解, 假定算子 $L_{\varepsilon, \mu}$ 的系数都是足够光滑的。在边界 $\partial\Omega$ 的邻域建立局部坐标系: $(\rho, \varphi) = (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ 其定义见[1]。并在 $\partial\Omega$ 的 η 邻域再引进新变量 t , 令

$$t = \frac{\rho}{\mu} \quad (2.6)$$

按照文[1]、[2]的类似做法, 得到算子 $L_{\varepsilon, \mu}$ 关于独立变量: $(t, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ 具有如下形式:

$$L_{\varepsilon, \mu} \equiv \mu^{-2m} \left[M_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mu^k M_k + \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{2l} \sum_{k=0}^{n+1} \mu^k \widetilde{M}_k \right] \quad (2.7)$$

其中

$$M_0 \equiv \sum_{r=1}^{2l-1} b_{2m+r}(\varphi) D_t^{2m+r} + C_{2m}(\varphi) D_t^{2m} \quad (2.8)$$

是关于 t 的 $2(m+l)-1$ 阶的常系数常微分算子。式中

$$b_{2m+r}(\varphi) = b_{r, 2m+r, 0 \dots 0}(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=0}, \quad (r=1, 2, \dots, 2l-1)$$

$$C_{2m}(\varphi) = C_{2m, 0 \dots 0}(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=0},$$

以上两式右边函数的含义见文[2]中(2.6)式。而 $M_k (k=1, 2, \dots, n)$, $\widetilde{M}_k (k=0, 1, \dots, n)$ 均为关于 t 的不高于 $2(m+l)-1$ 阶的变系数常微分算子, 其系数为关于 t 的多项式, 次数不超过 $k (k \leq n)$; 又 M_{n+1} , \widetilde{M}_{n+1} 也为类似的变系数常微分算子, 但其系数是关于 t 和 φ 的光滑函数。

这样一来, 边界 $\partial\Omega$ 邻域的边界层函数可由求解如下的齐次方程得到。

$$\left[M_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mu^k M_k + \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{2l} \sum_{k=0}^{n+1} \mu^k \widetilde{M}_k \right] v_{\varepsilon, \mu}^{N_1}(t, \varphi) = 0. \quad (2.9)$$

把(2.3)式右边代入(2.9)式, 比较 ε/μ 和 μ 的同次幂的系数, 取 $n = N_1 = N + m + l - 1$, 得到关于求边界层函数的递推方程:

$$M_0 v_{0,0} = 0, \quad (2.10)$$

$$M_0 v_{p-j,j} = - \sum_{k=1}^j M_k v_{p-j,j-k} - \sum_{k=0}^j \widetilde{M}_k v_{p-j-2l,j-k} \quad (2.11)$$

$$(j=0, 1, \dots, p; p=1, 2, \dots, N+m+l-1)$$

(三) 形式渐近解的边值条件

经过以上两次变量替换得知, 在边值条件(1.2)中的算子:

$$D_s^* = D_\rho^* = \mu^{-s} D_i^*,$$

并且在边界 $\partial\Omega$ 上, $\rho=0$, 再由 (2.6) 得知 $t=0$. 这样一来, 把形式渐近解(2.1)–(2.3)式代入边值条件(1.2), 仍由比较 ε/μ 和 μ 的同次幂的系数得到:

$$D_\rho^* \omega_{p-j,i}(0, \varphi) = -D_i^* \nu_{p-j,i+s-m}(0, \varphi) \quad (B_s) \\ (s=0, 1, \dots, m-1, j=0, 1, \dots, p, p=0, 1, \dots, N)$$

$$D_\rho^* Z_N \Big|_{\partial\Omega} = \mu^{m-s} \sum_{p=N+1+s-m}^{N+m+l-1} \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j} \mu^j D_i^* \nu_{p-j,i}(0, \varphi) \equiv \gamma_s(\varphi, \varepsilon, \mu) \quad (R_s) \\ (S=0, 1, \dots, m-1)$$

$$D_i^{m+s} \nu_{p-j,i}(0, \varphi) = \begin{cases} -D_\rho^{m+s} \omega_{p-j,i-s}(0, \varphi), \\ (S=0, 1, \dots, l-1, j=0, 1, \dots, p, p=0, 1, \dots, N+S) \end{cases} (B_{m+s}) \\ 0, \quad (j=0, 1, \dots, p, p=N+1+S, \dots, N+m+l-1)$$

$$D_\rho^{m+s} Z_N \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (s=0, 1, \dots, l-1) \quad (R_{m+s})$$

(四) 渐近解的构造

根据上面所导出的第一、二迭代过程的递推方程和边值条件, 由递推方程(2.4), (2.5)和边值条件 (B_s) ($s=0, 1, \dots, m-1$) 确定 $\omega_{p-j,i}(x)$ ($j=0, 1, \dots, p, p=0, 1, \dots, N$), 另一方面由递推方程(2.10), (2.11)和初值条件 (B_{m+s}) ($s=0, 1, \dots, l-1$) 确定边界层函数 $\nu_{p-j,i}(t, \varphi)$ ($j=0, 1, \dots, p, p=0, 1, \dots, N+m+l-1$), 并按文[1]中所规定的程序进行求解。

依上述假定退化问题 A_0 的解存在唯一, 且算子 $L_{s,s}$ 的系数和函数 $f(x)$ 都是够光滑的, 由 Nirenberg^[5] 的结果知道, 所求得的每一个 $\omega_{p-j,i}(x)$ 都是足够光滑的, 这样就保证了第一、二迭代过程都能够进行。

为了使递推方程 (2.10), (2.11) 和初值条件 (B_{m+s}) ($s=0, 1, \dots, l-1$) 所确定的解具有边界层函数之性质, 因此, 我们假定常微分算子 M_0 的特征方程:

$$C_\bullet(\lambda) \equiv \sum_{r=1}^{2l-1} b_{2m+r}(\varphi) \lambda^{2m+r} + C_{2m}(\varphi) \lambda^{2m} = 0 \quad (2.12)$$

具有 l 个负实部相异的根: $-\lambda_j(\varphi)$ ($j=1, 2, \dots, l$). 这时并称问题 $A_{s,s}$ 正则退化为问题 A_0 .

因此, 由常微分方程初值问题的理论得知, 所求得的边界层函数具有如下形式:

$$\sum_{j=1}^l P_j(t, \varphi) e^{-\lambda_j t}, \quad (2.13)$$

其中 $P_j(t, \varphi)$ 为 t 的多项式, 其系数是 φ 的光滑函数。但是, 由第二迭代方程所求得的函数只在边界 $\partial\Omega$ 的 η 邻域有定义, 为了得到在整个区域 Ω 上有意义的边界层函数, 援用平滑函数 $\Psi(\rho) \in C(\infty; (\overline{\Omega}))$, 且

$$\Psi(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq \eta/3 \\ 0, & \rho \geq \eta \end{cases} \quad \text{和 } 0 \leq \Psi(\rho) \leq 1,$$

作函数: $\tilde{\nu}_{p-j,i}(t, \varphi) = \Psi(\rho) \nu_{p-j,i}(t, \varphi)$, ($j=0, 1, \dots, p, p=0, 1, \dots, N+m+l-1$)

则 $\tilde{\nu}_{p-j,i}(t, \varphi)$ 为定义于整个区域 Ω 上的边界层函数, 且在边界 $\partial\Omega$ 的 $\eta/3$ 邻域内, $\tilde{\nu}_{p-j,i}(t, \varphi)$

$\equiv v_{p-j,i}(t, \varphi)$ 。

因此, 可以证明按上述构造所得到的函数:

$$W_{\varepsilon, \mu}^N(x) \equiv \sum_{p=0}^N \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j} \mu^j \omega_{p-j,i}(x) + \mu^m \sum_{p=0}^{N+m+l-1} \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j} \mu^j \tilde{v}_{p-j,i}(t, \varphi) \quad (2.14)$$

是摄动问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 的形式渐近解。其证明方法与文[12]相同, 不予详述。可得到在整个区域 Ω 上成立:

$$L_{\varepsilon, \mu} W_{\varepsilon, \mu}^N(x) = f(x) + G(\varepsilon, \mu) \Phi(x), \quad (2.15)$$

其中 $\Phi(x) = O(1)$,

$$G(\varepsilon, \mu) = \begin{cases} \mu^{N+1}, & \text{当 } \varepsilon/\mu^2 \rightarrow \beta (\mu \rightarrow 0) (0 \leq \beta < \infty) \\ \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^N \left[\mu + \mu^{-m} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{m+l} \right], & \text{当 } \varepsilon/\mu^2 \rightarrow \infty (\mu \rightarrow 0) \end{cases} \quad (2.16)$$

以及

$$D_{\rho}^s W_{\varepsilon, \mu}^N(x) \Big|_{\partial\Omega} = -\gamma(\varphi, \varepsilon, \mu) = \begin{cases} \mu^{m-s} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} + \mu\right)^{N+1+s-m} \Phi_s(\varphi), & (s=0, 1, \dots, m-1) \\ 0, & (s=m, m+1, \dots, m+l-1) \end{cases} \quad (2.17)$$

其中 $\Phi_s(\varphi) = O(1)$ 。所以 $W_{\varepsilon, \mu}^N(x)$ 是摄动问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 的形式渐近解。

三、余项估计

我们用 Z_N 表示摄动问题的解与所构造的形式渐近解 $W_{\varepsilon, \mu}^N(x)$ 的余项, 即

$$Z_N = \omega_{\varepsilon, \mu}(x) - W_{\varepsilon, \mu}^N(x). \quad (3.1)$$

将 $\omega_{\varepsilon, \mu} = W_{\varepsilon, \mu}^N + Z_N$ 代入摄动边值问题(1.1), (1.2), 得到关于 Z_N 的边值问题:

$$L_{\varepsilon, \mu} Z_N = -G(\varepsilon, \mu) \Phi(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \quad (3.2)$$

$$D_{\rho}^s Z_N \Big|_{\partial\Omega} = \gamma_s(\varphi, \varepsilon, \mu) \quad (s=0, 1, \dots, m+l-1) \quad (3.3)$$

其中当 $s \geq m$ 时, $\gamma_s(\varphi, \varepsilon, \mu) = 0$ 。

作函数:

$$\tilde{Z}_N = \Psi(\rho) \sum_{h=0}^{m-1} \frac{\rho^h}{h!} \gamma_h(\varphi, \varepsilon, \mu). \quad (3.4)$$

由关系式 (R_s) ($s=0, 1, \dots, m-1$) 得到

$$L_{\varepsilon, \mu} \tilde{Z}_N = \sum_{h=1}^m \mu^h \left(\frac{\varepsilon}{\mu} + \mu\right)^{N+1-h} \tilde{\Phi}(x) \equiv \tilde{G}(\varepsilon, \mu) \tilde{\Phi}(x). \quad (3.5)$$

其中 $\tilde{\Phi}(x) = O(1)$,

$$\widetilde{G}(\varepsilon, \mu) = \begin{cases} \mu^{N+1}, & \text{当 } \varepsilon/\mu^2 \rightarrow \beta \ (\mu \rightarrow 0) \ (0 \leq \beta \leq \infty) \\ \mu \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^N, & \text{当 } \varepsilon/\mu^2 \rightarrow \infty \ (\mu \rightarrow 0) \end{cases} \quad (3.6)$$

置

$$\overline{Z}_N = Z_N - \widetilde{Z}_N. \quad (3.7)$$

则 \overline{Z}_N 满足如下齐次边值问题:

$$L_{s, \mu} \overline{Z}_N = G(\varepsilon, \mu) \overline{\Phi}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \in \Omega \quad (3.8)$$

$$D_s^s \overline{Z}_N|_{\partial\Omega} = 0, \quad (s = 0, 1, \dots, m+l-1) \quad (3.9)$$

其中 $\overline{\Phi}(x) = O(1)$.

假定当 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ 时, 算子 $L_{s, \mu}$ 有一致有界的逆算子 $L_{s, \mu}^{-1}$ (见文 [2]) 由 (3.8), (3.9) 得知,

$$\|\overline{Z}_N\|_{L_2(\Omega)} \leq k_1 G(\varepsilon, \mu). \quad (3.10)$$

又由 (3.4) 及 (R_s) ($s = 0, 1, \dots, m-1$) 式得到

$$\|\widetilde{Z}_N\|_{L_2(\Omega)} \leq k_2 G(\varepsilon, \mu). \quad (3.11)$$

故得

$$\|Z_N\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\overline{Z}_N\|_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{Z}_N\|_{L_2(\Omega)} \leq k_3 G(\varepsilon, \mu) \quad (3.12)$$

以上 k_1, k_2, k_3 均为不依赖于 ε, μ 的正常数.

四、结 论

首先, 我们作如下假设:

- (I) 算子 L_0 和 L_{2l} 分别为 $2m$ 和 $2(m+l)$ 阶的线性强椭圆型算子, 算子 L_r ($r = 1, 2, \dots, 2l-1$) 为不高于 $2m+r$ 阶的线性偏微分算子;
- (II) 问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 的参数, 即算子 $L_{s, \mu}$ 的系数, 函数 $f(x)$, 边界 $\partial\Omega$ 都是足够光滑的;
- (III) 问题 A_0 的解存在且唯一;
- (IV) 算子 $L_{s, \mu}$ 有一致有界的逆算子 $L_{s, \mu}^{-1}$ (其定义见文 [2]);
- (V) 摄动问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 正则退化为非摄动问题 A_0 , 即特征方程 (2.12) 存在 l 个相异负实部的根;

(VI) ε, μ 为相互依赖的正小参数, 且 $\varepsilon/\mu \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$).

因此, 我们得到下面的结果:

定理 1 假设如上条件 (I) — (VI) 成立, 则问题 $A_{\varepsilon, \mu}$ 的解 $\omega_{\varepsilon, \mu}(x)$ 有渐近式:

$$\begin{aligned} \omega_{\varepsilon, \mu}(x) &= \sum_{p=0}^N \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j} \mu^j \omega_{p-j, j}(x) \\ &+ \mu^m \sum_{p=0}^{N+m+l-1} \sum_{j=0}^p \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{p-j} \mu^j \widetilde{v}_{p-j, j}(t, \varphi) + Z_N(x, \varepsilon, \mu). \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\omega_{s,0}(x)$ 是退化问题 A_0 的解; $\omega_{p-j,j}(x)$ ($j=0,1,\dots,p$; $p=1,2,\dots,N$) 由递推方程 (2.5) 和边值条件 (B_s) ($s=0,1,\dots,m-1$) 确定; $\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi) = \Psi(\rho)V_{p-j,j}(t,\varphi)$ ($j=0,1,\dots,p$; $p=0,1,\dots,N+m+l-1$) 其中 $V_{p-j,j}(t,\varphi)$ 是边界层函数, 由递推方程 (2.10), (2.11) 和初值条件 (B_{m+l}) ($s=0,1,\dots,l-1$) 确定. 又若 $\varepsilon/\mu^2 \rightarrow \beta$ ($\mu \rightarrow 0$) ($0 \leq \beta < \infty$) 则余项 Z_N 有如下估计式:

$$\|Z_N\|_{L_2(\Omega)} = O(\mu^{N+1}). \quad (4.2)$$

对于 $\varepsilon/\mu^2 \rightarrow \infty$ ($\mu \rightarrow 0$) 的情形, 我们讨论一种特殊情况, 即 $\varepsilon = \mu^{1+\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$). 这时有

$$G(\varepsilon, \mu) = \mu^{\alpha N} \left(\mu + \mu^{\alpha(m-l)-m} \right) = \begin{cases} O(\mu^{\alpha N}), & \text{当 } \frac{m}{m+l} \leq \alpha < \frac{m+1}{m+l}, \\ O(\mu^{\alpha N+1}), & \text{当 } \frac{m+1}{m+l} \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

于是又得到如下结果:

定理 2 假设如上条件 (I)–(VI) 成立. 若 $\varepsilon = \mu^{1+\alpha}$ ($\frac{m}{m+l} \leq \alpha < 1$), 问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的解 $\omega_{\varepsilon,\mu}(x)$ 仍有渐近式 (4.1), 而其余项 Z_N 有如下估计式:

$$\|Z_N\|_{L_2(\Omega)} = \begin{cases} O(\mu^{\alpha N}), & \text{当 } \frac{m}{m+l} \leq \alpha < \frac{m+1}{m+l}, \\ O(\mu^{\alpha N+1}), & \text{当 } \frac{m+1}{m+l} \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

五、附 注

关于高阶线性椭圆型方程第一边值问题的奇摄动, 在文 [3]、[4] 中, М.И. Вишик 和 Л.А. Люстерник 进行了系统的研究, 并且建立了严格的奇摄动理论. 但是, 他们在摄动问题正则退化为非摄动问题的假设条件下, 构造出边界层函数. 尔后, Besjes^[6] 在方程不含低阶项算子 L_r ($r=1,2,\dots,2l-1$) 的特殊情况下, 得到在这种情况下正则退化条件成立. 本文和文 [2] 通过方程式引入两个不同形式相互依赖的正小参数, 即方程 (1.1), 在文 [2] 得到, 当 $\mu/\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) 时, 正则退化条件成立, 从而拓宽了文 [3]、[4]、[6] 所研究的问题; 本文考虑 $\varepsilon/\mu \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$) 的情况, 为构造边界层函数, 仍需要类似于文 [3]、[4] 关于正则退化的假设条件, 一般地这里关于正则退化条件要求更强些.

参 考 文 献

- [1] 郑永树, 高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动 (I), 福建师大学报, 自然科学版, 1(1980), 9—22.
- [2] 郑永树, 高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动 (II), 应用数学和力学, 2, 5(1981), 563—574.
- [3] Вишик, М.И. и Люстерник, Л.А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, 12, 5 (1957) 3—122.

-
- [4] Вишик, М.И. и Люстерник, Л. А. , Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений I, УМН, 15, 3 (1960), 3—80.
- [5] Nirenberg, L., Estimates and existence of elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., 9(1956), 509—530.
- [6] Besjes, J.G. , Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order, J.Math. Anal. and Appl., 49, 1 (1975), 24—46.