线性动态系统的Walsh级数综合

陈 玉 宝

（电 子 工 程 系）

摘 要

本文是文〔1〕的继续和深入，在此我们引用了逻辑导数及在 Walsh 变换下的微分性质，给出了在已知系统输入、输出特性下求解传递函数和状态空间诸系数矩阵，并描述了确定其具体数值的最佳逼近方法；同时，也给出了在已知系统传递函数系数的情况下，求解过渡过程的逻辑微分方程的方法。文后，对 Walsh 变换在现代控制论的其它若干领域的应用作了探讨性的描述，得出了一些有意义的新结果。

一、引 言

在文〔1〕中，我們已讨论了 Walsh 函数的若干性质和应用，本文将研究它的一些其它特性和应用。限于篇幅，凡是文〔1〕中讨论过 Walsh 函数的特性，在此均从简或略去。

设 P 为大于 1 的整数，t、x为非负实数，P 进广义 Walsh 函数定义为[2]：

$$W(t,x)\equiv W_P(t,x)=exp\left\{\frac{2\pi i}{p}(t\odot x)\right\} \tag{1}$$

任一满足 Dirichlet 条件的周期函数 $x(t)$，展开为正交的 Walsh 级数为：

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(t) \tag{2}$$

若 $x(t)\epsilon L^2(0,1)$ ，则满足 *Parseval* 等式：

$$1/T\int x^2(t)dt=C/T\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^2 \tag{3}$$

考虑到N维的 Walsh－Fourier 变换，先引进范数 $\|f\|=\int_0^\infty|f(x)|dx$，如果$F(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$和 $A(\lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots\lambda_n)$满足：

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\cdots\int_0^\infty |F(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)|dx_1dx_2\cdots\cdots dx_n\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|\\&\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\cdots\int_0^\infty |A(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots\lambda_n)|d\lambda_1d\lambda_2,\cdots\cdots d\lambda_n\leqq\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

则广义多元 Walsh 变换存在。

令 $L = L'(R_+^n)$ 表示 R_+^n 空间上 n 元函数 L 可积函数空间，L' 中的函数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ 的 Walsh 变式定义为：

$$f^{\wedge}(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\cdots\int_0^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)\,\overline{W}(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n; y_1, y_2\cdots\cdots y_n)dx_1 dx_2\cdots\cdots dx_n \tag{5}$$

其中 $W(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n; y_1, y_2, \cdots\cdots y_n)$ 是 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n) \in R_+^n$ 的 P 进制元 Walsh 函数。

若两函数 $f, g \in L_{(R+)}$，则其 P 进制卷积定义为：

$$(f * g)(t) = \int_0^{\infty} f(u) g(t \ominus u) du \tag{6}$$

二、逻辑导数及Walsh变换的微分性质[2-3]

我們定义 P 进逻辑导数为：若 $f(x) \in L_{(R+)}$ 的实或复值函数和式[3]

$$\sum_{k=-N}^{N} P^k \left(\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus jp^{-k-1}) \right)^{*} \tag{7}$$

当 $N \to \infty$ 时按照 $L_{(R+)}$ 范数收敛，亦即存在 $g(x) \in L_{(R+)}$，使得[4]：

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{k=-N}^{N} P^k \left(\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus jp^{-k-1}) - g(x) \right\|_L = 0 \tag{8}$$

则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的强逻辑导数，记为 $g = s^{[1]}f$。

如果对于 $x_0 \in R_+$；有：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P^k \left[\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x_0 \oplus jp^{-k-1}) \right] = Z \tag{9}$$

则称 Z 为 $f(x)$ 在点 x_0 的逻辑导数，记为：$Z = f^{[1]}(x_0)$

鉴于 Walsh 函数不属于 $L_{(R+)}$，故不考虑其强逻辑导数，此外据式(9)对 x 可求出其按点逻辑导数（视 y 为参数）。

$$W^{[1]}(y, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P^k \sum_{j=1}^{p-1} A_j W(y, x \oplus jp^{-k-1}) = yW(y, x) \tag{10}$$

其中 $W(y, x) = exp\left\{ \frac{2\pi i}{p}(y \odot x) \right\}$；

尔后据[2]：$y \odot x = \sum_{k=-r}^{s+1} y_k x_{1-k}$，利用数学归纳法可以证明：

---

* 当 $p = 2$ 时，用[3]中的方法可导出式(7)为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k [f(x) - f(x \oplus 2^{-k})]$

$$W^{[r]}(y,x)=y^{[r]}W(y,x) \tag{11}$$

若$f^{\wedge}(y)$是$f(x)$的 Walsh－Fourier 变换，当f，$f^{[1]}\in L^2$时，我们有：

$$[f^{[1]}(x)]^{\wedge}(y)=yf^{\wedge}(y)$$

于是：$$f^{[1]}(x)=\int_0^{\infty}yf^{\wedge}(y)W(y,x)dy \tag{13}$$

同理，用归纳法可以证出：

$$[f^{[r]}(x)]^{\wedge}(y)=y^r f^{\wedge}(y) \tag{14}$$

它的逆 Walsh 变换为：

$$f^{[r]}(x)=\int_0^{\infty}y^r f^{\wedge}(y)W(y,x)dy \tag{15}$$

上述的逻辑导数及 Walsh 变换的微分性质均属于线性算子。另则；上述的结果现已推广至多元 Walsh变换的情形[5][6]，在此不加叙述。

三、Walsh 变换在线性系统分析综合中的应用

3.1：线性定常系统的传递函数综合

对于单被调量系统在给定控制和扰动作用下，其动态过程的微分方程可描述为[9]：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{d^iy(t)}{dt^i}=\sum_{j=1}^{m}b_j\frac{d^jg(t)}{dt^j}+\sum_{k=1}^{\nu}L_k\frac{d^kf(t)}{dt^k} \tag{16}$$

其中：$y(t)$为被调量，$g(t)$为给定控制作用，$f(t)$为主扰动作用。

我们对系统的要求是：从控制的角度希望$y(t)$准确地跟随着$g(t)$变化，从扰动的角度，希望$y(t)$不受$f(t)$的影响。因此，在理想情况下要求：$L_k=0$，$k=1,2,\cdots\cdots\nu$，$a_i=b_j$，$i=j=1,2,\cdots\cdots n$。若令：$y(0)=y^1(0)=\cdots\cdots=y^{(n)}(0)=0$，则理想条件可写为：

$$y(t)\equiv g(t),\ 0\leqslant t<\alpha,\ g(t)-y(t)=e(t)=0 \tag{17}$$

式中$e(t)$为误差的时间函数。满足式(17)的“不变性”系统实际上是不存在的。在应用中，对方程式(16)的要求只能是尽可能多的低阶系数相等。即$L_k=0$，$k=1,2,\cdots\cdots$；$k<\nu$；$a_i=b_j$，$i=j=1,2,\cdots\cdots i<n$。对误差的要求只能是$|e(t)|$大于零，但时刻接近于零。用误差函数积分大小来表示系统品质的优劣，常用的有：

$$S_1=\int_0^{\infty}|e(t)|dt,\ S_2=\int_0^{\infty}e^2(t)dt,\ S_3=\int_0^{\infty}t|e(t)|dt\cdots\cdots \tag{18}$$

据上述分析，我们现在可以从已知系统输入输出特性的情况下，求动态系统的传递函数诸系数。从满足“近似不变性”系统要求的微分方程可改写为：

$$y^n(t)+a_n y^{(n-1)}(t)+a_{n-1}y^{(n-2)}(t)+\cdots\cdots+a_2y^{(1)}(t)+a_1y(t)$$
$$=b_ng^{(n-1)}(t)+b_{n-1}g^{(n-2)}(t)+\cdots\cdots b_2g^{(1)}(t)+b_1g(t) \tag{19}$$

将式(19)从0到t地进行两边积分后可得：

$$y(t)+a_n\int_0^t y(t)dt_1+a_{n-1}\int_0^t\int_0^{t_1}y(t)dt_1dt_2+\cdots\cdots+a_1\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\cdots\int_0^{t_{n-1}}y(t)dt_1\cdots dt_n$$

$$=b_n\int_0^t g(t)dt_1+b_{n-1}\int_0^t\int_0^{t_1}g(t)dt_1dt_2+\cdots\cdots+b_1\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\cdots\int_0^{t_{n-1}}g(t)dt_1dt_2\cdots\cdots dt_n \tag{20}$$

系统实测的输出与给定要求输出之间的偏差是：

$$e(t)=y(t)+\left[a_n\int_0^t y(t)dt_1+a_{n-1}\int_0^t\int_0^{t_1}y(t)dt_1dt_2+\cdots\cdots+a_1\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\cdots\int_0^{t_{n-1}}y(t)dt_1dt_2\cdots\cdots dt_n\right]-\left[b_n\int_0^t g(t)dt_1+b_{n-1}\int_0^t\int_0^{t_1}g(t)dt_1dt_2+\cdots\cdots+b_1\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\cdots\int_0^{t_{n-1}}g(t)dt_1dt_2\cdots\cdots dt_n\right] \tag{21}$$

若用 Walsh 级数去逼近上述函数，在〔0，1〕内取 m 个子区间，可得到每个区间的偏差。有：

$$e(t)=\lambda\Phi(t),\quad y(t)=C\Phi(t),\quad g(t)=\mathrm{H}\Phi(t) \tag{22}$$

式中λ、C、H均为$1\times m$的行矩阵，且C、H为已知的。同时我们令：

$$\int_0^t\Phi(t)dt\overset{\triangle}{=}p\Phi(t),\quad \int_0^t\int_0^{t_1}\Phi(t)dt_1dt_2\overset{\triangle}{=}p^2\Phi(t),\quad\cdots\cdots\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\cdots\int_0^{t_{n-1}}\Phi_n(t)dt_1dt_2\cdots\cdots dt_n\overset{\triangle}{=}p^n\Phi(t)$$

则方程式(22)可改写为：

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda\Phi(t_i)=\sum_{i=1}^{m}\left\{C\left[I+a_np+a_{n-1}p^2+\cdots\cdots+a_1p^n\right]-\mathrm{H}\left[b_np+b_{n-1}p^2+\cdots+b_1p^n\right]\right\}\Phi(t_i) \tag{23}$$

将式(23)综合成矩阵形式有：

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda\Phi(t_i)=\sum_{i=1}^{m}\left\{(a_na_{n-1}\cdots\cdots a_2a_1b_nb_{n-1}\cdots\cdots b_2b_1)\begin{pmatrix}Cp\\Cp^2\\\vdots\\Cp^n\\-\mathrm{H}p\\-\mathrm{H}p^2\\\vdots\\-\mathrm{H}p^n\end{pmatrix}\Phi(t_i)+C\Phi(t_i)\right\} \tag{24}$$

式(24)仅是待求系数$a_n\cdots\cdots a_1b_n\cdots\cdots b_1$的函数，令：

$$\left.\begin{array}{l} x^T \overset{\triangle}{=} (a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_2 a_1 b_n b_{n-1} \cdots\cdots b_2 b_1) \\ \begin{pmatrix} -CP \\ \\ \\ \\ HP \end{pmatrix} \overset{\triangle}{=} \begin{pmatrix} -CP \\ -CP^2 \\ \vdots \\ -CP^n \\ HP \\ HP^2 \\ \vdots \\ HP^n \end{pmatrix} \end{array}\right\} \qquad (25)$$

则式(24)变为：

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda\Phi(t_i) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ x^T \begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix} \Phi(t_i) + C\Phi(t_i) \right\} \qquad (26)$$

要得到最佳逼近，应使$\int_0^{\infty} e^2(t)dt$为最小，在此应需 m 个子区间的偏差的平方和为最小，从式(26)中易知，它们是 X 的函数，故对误差平方求和并令其导数为零可得：

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)+C\Phi(t_i)\right\}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)+C\Phi(t_i)\right\}^T$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)+C\Phi(t_i)\right\}\left\{\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}+C\right\}\Phi(t_i)\right\}^T$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)+C\Phi(t_i)\right\}\Phi^T(t_i)\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}+C\right\}^T$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)+C\Phi(t_i)\right\}\Phi^T(t_i)\left\{\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+C^T\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)\Phi^T(t_i)\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+C\Phi(t_i)\Phi^T(t_i)\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+\right.$$

$$\left.X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)\Phi^T(t_i)C^T+C\Phi(t_i)\Phi^T(t_i)C^T\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\Phi(t_i)\Phi^T(t_i)\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+CI\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+\right.$$

$$\left.XT\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}C^T+I\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+C\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T X+X^T\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}C^T+I\right\}$$

$$=\left\{\left\{\left\{\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T\right\}+\left\{\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T\right\}^T\right\}X+\left\{C\begin{bmatrix} CP \\ -HP \end{bmatrix}^T\right\}^T\right.$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}C^{T}\right\}\Bigg\}$$

$$=\left\{\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}^{T}\right\}+\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}^{T}\right\}\right\}X+\Bigg\{\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}C^{T}\right\}$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}C^{T}\right\}\Bigg\}$$

$$=\left\{2\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}^{T}\right\}X\right\}+2\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}C^{T}\right\}=0 \tag{27}$$

经整理后则得：

$$X=\begin{pmatrix}a_n\\ \vdots\\ a_1\\ b_n\\ \vdots\\ b_1\end{pmatrix}=\left\{\left\{\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}^{T}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}CP\\-HP\end{bmatrix}C^{T}\right\} \tag{28}$$

如果上述系数是最佳的话，且该系统是稳定的，则应满足下述关系（对无超调系统而言）。

设方程(19)的齐次方程为：

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots\cdots+a_0 y(t)=0 \tag{29}$$

积分后可得：

$$a_n y^{(n-1)}(t)\Big|_0^{\infty}+a_{n-1}y^{(n-2)}(t)\Big|_0^{\infty}+\cdots\cdots+a_1 y(t)\Big|_0^{\infty}+a_0\int_0^{\infty}y(t)dt=0$$

令：

$$y^{(n-1)}(\infty)=y^{(n-2)}(\infty)=\cdots\cdots y(\infty)=0$$

有：

$$\int_0^{\infty}e(t)dt=\int_0^{\infty}y(t)dt=\frac{a_n y_0{}^{(n-1)}+a_{n-1}y_0{}^{(n-2)}+\cdots\cdots+a_1 y_0}{a_0}<\varepsilon(t) \tag{30}$$

其中 $\varepsilon(t)$ 为任意无穷小数。

3.2：用逻辑微分方程求解线性系统的输出特性

与3.1节不同，现在我们来考虑已知系统诸系数的情况下，求解其输出特性的方法。线性定常系统我们可用常系数线性逻辑微分方程描述：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{[k]}(t)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^{[k]}(t) \tag{31}$$

其中：$y(t)$为输出，$x(t)$为输入。

式(31)的解可分为齐次方程的通解 y_t 与非齐次方程特解 y_D 之和。下面我们先求出 y_t

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{[k]}(t)=0 \tag{32}$$

令：$y(t)=W_{\xi}(t)$

得：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\xi^k w_{\xi}(t)=0 \tag{33}$$

上述结果是利用了 Walsh 级数和逻辑导数的定义导出的。

若ξ是特征方程 $\sum_{k=0}^{n} a_k\xi^k=0$的根，则 $w_{\xi}(t)$就是式(33)的一个特解，设式(33)有n个单根ξ_1，ξ_2，ξ_3，……ξ_n；则式(33)的通解为：

$$y_t=\sum_{i=0}^{n} C_i W_{\xi_i}(t) \tag{34}$$

为求出非齐次方程(31)的特解，将式(31)两端取 Walsh—Fourier 变换，並利用其微分性质可得：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k y^{\Lambda}(s)=\sum_{k=0}^{m} b_k s^k x^{\Lambda}(s)$$

令$H(s)$为系统的传递函数，则有：

$$H(s)=\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k s^K}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^K},\quad y^{\Lambda}(s)=\frac{\sum_{k=0}^{n} b_K s^K}{\sum_{k=0}^{n} a_K s^K}x^{\Lambda}(s) \tag{35}$$

求逆 Walsh—Fourier 变换后得到：

$$y_D(t)=\int_0^{\infty} h(t\oplus\tau)x(\tau)d\tau \tag{36}$$

则有整个方程式(31)的通解为：

$$y=\sum_{i=0}^{n} C_i W_{\xi i}(t)+\int_0^{\infty} h(t\oplus\tau)x(\tau)d\tau \tag{37}$$

我们若要求出满足初始条件的特解，可由方程$\sum_{i=0}^{n} C_i\xi_i^{\,k}=y^K{}_{(0)}$中求出$C_i$，並代入式(37)后可得出已确定了任意常数的方程组。

3.3　状态方程的 Walsh 级数综合

文〔1〕中，我们已经讨论了这种方法，但在文中仅是讨论一种变换，並且没有最佳逼近的运算过程，故在本文中也将那部份简述出，以便和另一种变换比较並且使它趋于完善化。

我们仍设线性定常系统的状态方程是：

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}=AX+Bu, \qquad X(0)=X_0 \\ \dot{X}=\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots\cdots a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\cdots\cdots b_{1m} \\ b_{21}b_{22}\cdots\cdots b_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}b_{n2}\cdots\cdots b_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} \end{array}\right\} \tag{38}$$

现在分二种情况来考虑：一种是已知系统的输入和各系数矩阵，求出系统的输出状态变量$X(t)$，另一种是在输入为零的情况下，输出状态变量已经测出，求其输出矩阵的待定系数A。

在第一种情况下，我们用系数是$n\times m$的m项Walsh函数去逼近确定$\dot{X}$，有：

$$\dot{X}=\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{10}c_{11}\cdots\cdots c_{1(m-1)} \\ c_{20}c_{21}\cdots\cdots c_{2(m-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n0}c_{n1}\cdots\cdots c_{n(m-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{(m-1)} \end{pmatrix}\stackrel{\triangle}{=}C_{(m\times n)}\Phi_{(m)} \tag{39}$$

解此微分方程与常规方法不太一样，因为所采用的变量$\dot{X}$是未确定的向量级数，状态变量$x(t)$可由积分求得：$x(t)=c\int_0^t \phi(\lambda)d\lambda+x_0\stackrel{\triangle}{=}CP\Phi(t)+x_0$

将输入向量也用Walsh函数表征有：

$$u=\begin{pmatrix} h_{10}h_{11}\cdots\cdots h_{1(m-1)} \\ h_{20}h_{21}\cdots\cdots h_{2(m-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{n0}h_{n1}\cdots\cdots h_{n(m-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{(m-1)} \end{pmatrix}\stackrel{\triangle}{=}H\Phi(t) \tag{40}$$

其中H与式(39)中的C均是常数矩阵。

把式(40)与(39)代入式(38)后可得：

$$C\Phi=A\left\{CP\Phi+X_0\right\}+BH\Phi \tag{41}$$

若把Ax_0也写为向量形式有：

$$AX_0=AX_0\Phi_0=\left[AX_0 0 0\cdots\cdots 0\right]\Phi=G\Phi$$

则式(41)变为：　　$C=ACP+G+BH=ACP+K$

其中$K=G+BH$，则得[1]：

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\left(P'\otimes A\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}=\left(I-P'\otimes A\right)^{-1}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} \tag{42}$$

求出C后，$x(t)$可方便求出：

$$C\Phi=CP\Phi(t)+X_0 \tag{43}$$

现在考虑第二种情况，在此，问题归结为求A，则存在：

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}=Ax, \quad x(0)=x_0 \\ x(t)-x_0=A\int_0^t x(t)dt \end{array}\right\} \tag{44}$$

用 Walsh 级数去逼近 $x(t)$ 可得：

$$x(t)=\begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\cdots\cdots c_{1m} \\ c_{21}c_{22}\cdots\cdots c_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}c_{n2}\cdots\cdots c_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix}\overset{\triangle}{=}C\Phi(t) \tag{45}$$

这点与上述不一样，上述是逼近 $\dot{X}$。于是：

$$\int_0^t x(t)dt=\int_0^t C\Phi(t)dt=C\int_0^t \Phi(t)dt\overset{\triangle}{=}CP\Phi(t) \tag{46}$$

此时式(44)可改写为：

$$C\Phi(t)=ACP\Phi(t)+X_0 \tag{47}$$

鉴于 $x(t)$ 是实际量测的值，式(47)存在着误差，

$$\varepsilon(t)=C\Phi(t)-ACP\Phi(t)-X_0 \tag{48}$$

为了获得最佳拟合的函数 A，应使在 m 个子区间取样得到的 m 个误差向量均方和对 A 求导为零，它的要求可描述为：

$$\frac{d}{dA}\sum_{i=1}^{m}\Big[(C-ACP)\Phi(t_i)-X_0\Big]\Big[(C-ACP)\Phi(t_i)-X_0\Big]^T=0$$

类似于前述，根据矩阵运算法则和导数运算方法，可得到 A 的最佳逼近值为：

$$A=\Big[C-X_0E^T\Big](CP)^T\Big[CP(CP)^T\Big]^{-1} \tag{49}$$

其中：

$$E\overset{\triangle}{=}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\Phi(t_i)$$

四、多变量离散並矢定常系统分析

除了我们上述讨论的连续系统 Walsh 变换的应用外，离散 Walsh 变换在非连续系统中也有许多应用。若$\{X_i\}$表示一个实信号的 N 个有限的采样值 X_i 的集合，（$i=0$，1，2，……n），则其离散变换和反变换定义为：

$$\left.\begin{aligned} A_n&=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}X_iW(n,i) \qquad n=0,\ 1,\ \cdots\cdots N-1\\ X_i&=\sum_{n=0}^{N-1}A_nW(n,i) \qquad i=0,\ 1,\ \cdots\cdots N-1\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

它的离散卷积定义为：若

$$X_i=\sum_{k=0}^{N-1}X_kW(k,t)\quad ,\qquad y_i=\sum_{k=0}^{N-1}y_kW(k,\tau)\ ;$$

则：$$z_{w(\tau)}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_iy_{\tau\oplus i}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_i\Big[\sum_{k=0}^{N-1}y_kw_k(\tau\oplus i)\Big]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k w(k,\tau)\sum_{i=0}^{N-1} x_i w(k,i)=\sum_{k=0}^{N-1} y_k x_k w(k,\tau) \qquad (51)$$

式(50)和式(51)是我们分析离散定常系统的有力工具。

4.1　定常时滞系统的移位 Walsh 级数综合

为了利用 Walsh 级数分析和综合用定常时滞微分方程描述了的线性系统，首先必须讨论移位 Walsh 矩阵。在此，我们把 Walsh 函数$\Phi_i(t)$在时间上平移k/m的函数$\Phi_i(t-k/m)$称之为时滞 Walsh 函数。即在$1\leqslant k<k/m$时，$\Phi_i(t-k/m)=0$，其中k是整数，满足$0<k\leqslant m$的关系。从式(50)中易知，前m个 Walsh 函数可用$\frac{1}{m}$间隔的离散化 Walsh 矩阵表述，如$m=4$时有：

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

若我们把 Walsh 矩阵的各列元素依次按照指定的移位列数K将其往右平移，并以零元素取代前K列的元素，直至已到指定的列数K为止。这种矩阵就是移位 Walsh 矩阵，记为 W(m; -k)。m 是前面 Walsh 矩阵间隔总数。-k则表示右移的列数。例如：

$$W(4;\ -1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\qquad W(4;\ -2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (53)$$

这种移位 Walsh 矩阵的一个重要特性是：

$$\Phi(t-k/m)u(t-k/m)=\frac{1}{m}W(m;-k)W_{\varphi}(t) \qquad (54)$$

其中$u(t)$是单位阶跃函数。

为证明式(54)可把时滞 Walsh 函数展开为 Walsh 级数来表述：

$$\Phi_i(t-k/m)u(t-k/m)=\sum_{j=0}^{m-1} q_{ij}\Phi_j(t)$$

$$q_{ij}=\int_0^1 \Phi_i(t-k/m)u(t-k/m)\Phi_j(t)dt$$

$$=\frac{1}{m}\left[\ W(m,\ -k)\text{的}(i+1)\text{行}\ \right]\left[\ W\text{的}(j+1)\text{列}\ \right].$$

现我们考虑线性系统的定常时滞微分方程为：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{X}(t)=Ax(t)+Bx(t-k/m)+Du(t) \\ &X(0)=X_0 \\ &X(t)=\varphi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

其中，$x(t)$是$n\times 1$向量，$u(t)$是$q\times 1$向量，A，B，D分别为$n\times n$，$n\times n$，$n\times q$矩阵。我们对式(55)进行积分可得：

$$x(t)-x_0=\int_0^t Ax(t')dt'+\int_0^t Bx(t'-k/m)dt'+\int_0^t Du(t')dt' \tag{56}$$

在$0\leqslant t<k/m$中，我们据(55)式可将(56)式变为：

$$x(t)-x_0=\int_0^t Ax(t')dt'+\int_0^{t} B\varphi(t'-k/m)dt'+\int_0^t Du(t')dt, \tag{57}$$

在 $k/m\leqslant t<1$中，我们引入单位阶跃函数使式(56)变为：

$$x(t)-x_0=\int_0^t Ax(t')dt'+\nu+\int_0^t Bx(t'-k/m)u(t'-k/m)dt'+\int_0^t Du(t')dt' \tag{58}$$

式中 $\nu=\int_0^{k/m} Bx(t'-k/m)dt'$

若我们用类似于前述的 Walsh 级数逼近有：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{令：}\ x(t)\overset{\triangle}{=}C\Phi(t),\quad u(t)\overset{\triangle}{=}H\Phi(t)\\
&\begin{bmatrix} x_0, & 0\cdots\cdots 0\end{bmatrix}\Phi(t)=G'\Phi(t),\quad \int_0^t \Phi(t)'dt'\overset{\triangle}{=}P\Phi(t)\\
&\varphi(t-k/m)=\begin{pmatrix} f_{10}f_{11}\cdots\cdots f_{1m-1}\\ f_{20}f_{21}\cdots\cdots f_{2m-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{n0}f_{n1}\cdots\cdots f_{nm-1}\end{pmatrix}\Phi(t)\overset{\triangle}{=}\begin{pmatrix} f_1^T\\ f_2^T\\ \vdots\\ f_n^T\end{pmatrix}\Phi(t)\overset{\triangle}{=}F\Phi(t)
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

将式(59)分别代入式(57)和式(58)后得：

$$\left.\begin{aligned}
&C\Phi(t)-G'\Phi(t)=ACP\Phi(t)+BFP\Phi(t)+DHP\Phi(t)\\
&C-G'=ACP+BFP+DHP
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

$k/m\leqslant t<1$

$$C\Phi(t)-\begin{bmatrix} x_0+\nu, & 00\cdots\cdots 0\end{bmatrix}\Phi(t)=ACP\Phi(t)+\int_0^t Bx(t'-k/m)u(t'-k/m)dt'+DHP\Phi(t) \tag{61}$$

令：$\int_0^t Bx(t'-k/m)u(t'-k/m)dt=\int_0^t BH\frac{1}{m}W\begin{bmatrix} m, & -k\end{bmatrix}w\Phi(t')dt'$

$$=BH\frac{1}{m}W\begin{bmatrix} m, & -k\end{bmatrix}WP\Phi(t)$$

$[x_0+\nu,\ 00\cdots\cdots 0]\Phi(t)=\delta\Phi(t)$

则式(61)变为：

$$\left.\begin{aligned}
&C\Phi(t)-\delta(t)\Phi(t)=ACP\Phi(t)+BH\frac{1}{m}W[m,\ -k]WP\Phi(t)+DHP\Phi(t)\\
&C-\delta=ACP+BH\frac{1}{m}W[m,\ -k]WP+DHP
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

有式(61)和式(62)，我们不难据上述方法对时滞微分方程所描述的线性系统进行综合，限于篇幅，在此就不多赘述了。

4.2 多变量並矢定常系统的状态空间法

在3.2中，我们讨论了由逻辑微分方程描述的单输入一单输出定常系统。相应于时域分析中的多输入一多输出线性系统的状态空间法，我们对用逻辑微分方程描述的多输入一多输出並矢线性系统也可用並矢（逻辑）状态空间法分析。不同的是我们现在的空间是建立在布尔空间之上，对于应时域的泛函分析，我们在此是采用泛系分析（序域分析）。令定义$\{k_+\}$中2^n集上的逻辑状态空间的状态方程为：

$$\begin{aligned} &X^{\Lambda}(k)=Ax(k)+Bu(k) \\ &y(k)=Cx(k)+Bu(k) \qquad k\in I^n \end{aligned} \tag{63}$$

其中：A、B、C均为常量矩阵，x，u，y分别状态变量、输入变量和输出变量的列向量。Λ代表逻辑微分算符。

类似传统的时域状态方程解法，我们也应首先考虑齐次状态方程之解，尔后考虑其非齐次方程的完全解。

状态逻辑微分方程所满足的齐次方程的解是：

$$X^{\Lambda}(k)=\lambda x(k),\qquad x(k)_{k=k_0}=x_0,\qquad k,\ k_0\in I_n \tag{64}$$

即：$\begin{cases} x(k)=u_n(\lambda,\ k\oplus k_0)x_0 & \lambda\in I_n \\ x(k)=0 & \lambda\bar{\in} I_n \end{cases}$

从 Walsh 函数的性质中即可证出：

$$\begin{aligned} X^{\Lambda}(k)&=u_n^{\Lambda}(\lambda,\ k\oplus k_0)x_0=u_n^{\Lambda}(\lambda,\ k)u_n(\lambda,\ k_0)x_0 \\ &=\lambda\cdot u_n(\lambda,\ k)\cdot u_n(\lambda,\ k_0)\cdot x_0=\lambda u_n(\lambda,\ k\oplus k_0)\cdot x_0 \\ &=\lambda x(k) \end{aligned} \tag{65}$$

对于齐次状态方程：

$$X^{\Lambda}(k)=Ax(k)\qquad k\in I_n \tag{66}$$

令式(66)A的阶是N，且设A的特征值是I_n集内的相异元素。在这些约束下，总有非奇异的矩阵M使得：

$$A=M^{-1}E_{\lambda}M \tag{67}$$

由A的特征值的I_n集内的相异元素的假设：在适当的变换下，A可写为二进系数对角矩阵的加权和：

$$A=M^{-1}\sum_{r=0}^{n-1}E_{\lambda}(r)2^rM=\sum_{r=0}^{n-1}(M^{-1}E_{\lambda}(r)M)2^r \tag{68}$$

其中$\lambda(r)$是二进展开的系数：

$$\lambda=\sum_{r=0}^{n-1}\lambda(r)2^r \tag{69}$$

于是对于每一个矩阵A，在I_n内具有相异根的相应矩阵为：

$$\left\{ A(r) \right\} = \left\{ M^{-1}E_{\lambda}(r)M,\ r=0,\ 1,\ \cdots\cdots n-1 \right\} \tag{70}$$

式(70)展开指数矩阵为：

$$exp\cdot(A(r)) = M^{-1}Eexp(\lambda(r))M \tag{71}$$

我们可将上述结果推广到更一般形式中去：

$$exp\cdot\left(j\pi\sum_{r=0}^{n-1}A(r)\cdot k(r)\right) = M^{-1}E\ exp\cdot\left(j\pi\sum_{r=0}^{n-1}\lambda(r)\cdot k(r)\right)M \tag{72}$$

由于：$u_n(\lambda,\ k) = exp\cdot\left(j\pi\sum_{r=0}^{n-1}\lambda(r)\cdot k(r)\right)$

则由 Walsh 函数矩阵定义式(72)可变为：

$$u_n(A,\ k) = M^{-1}Eu_n(\lambda,\ k)M \tag{73}$$

该矩阵具有下述性质：

(i)$u_n(A,\ k)$是自逆的非奇异矩阵

由：$u_n(A,\ k)\cdot u_n(A,\ k) = M^{-1}Eu_n(\lambda,\ k)MM^{-1}Eu_n(\lambda,\ k)M$

$= M^{-1}Eu_n(\lambda,\ k)Eu_n(\lambda,\ k)M = M^{-1}Eu_n(0,\ 0)M$

$= M^{-1}M = E$

则：$u_n(A,\ k)^{-1} = u_n(A,\ k)$

(ii)$u_n(A,\ k_1)\cdot u_n(A,\ k_2)$之积是矩阵 $u_n(A,\ k_1\oplus k_2)$

证：$u_n(A,\ k_1)\cdot u_n(A,\ k_2) = M^{-1}Eu_n(\lambda,\ k_1)Eu_n(\lambda,\ k_2)M$

$$= M^{-1}Eu_n(\lambda,\ k_1\oplus k_2)M = u_n(A,\ k_1\oplus k_2) \tag{75}$$

(iii)该矩阵另一性质是：Walsh 函数矩阵的逻辑微分是：

$$u_n^{\Delta}(A,\ k) = Au_n(A,\ k)$$

证：$u_n^{\Delta}(A,\ k) = M^{-1}u_n^{\Delta}(\lambda,\ k)M = M^{-1}E_{\lambda}Eu_n(\lambda,\ k)M$

$$= AM^{-1}Eu_n(\lambda,\ k)M = Au_n(A,\ k) \tag{76}$$

考虑到 x 矩阵的列是线性无关的，则方程(66)的解是这些向量的任意组合，如果：

$$x(k) = [x_1(k),\ x_2(k)\cdots\cdots x_N(k)] \tag{77}$$

则有：$x(k) = \sum_{i=1}^{N}C_iX_i(k)$ (78)

将式(78)作等效换有：

$$x(k) = u_n(A,\ k)\cdot c$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \tag{79}$$

由于$u(A,\ k)$是自逆的，则有：

$$= u_n(A,\ k)x(k) \tag{80}$$

如果系统是指定在 $k = k_0$ 时，则：

$$x(k_0) = u_n(A,\ k_0)\cdot c \tag{81}$$

若要求系统在 $k=k_1$ 时状态则:

$$x(k_1)=u_n(A,\ k_1)\cdot c=u_n(A,\ k_1)u_n(A,\ k_0)x_0$$
$$=u_n(A,\ k_1\oplus k_0)\cdot x_0 \tag{82}$$

式(82)的矩阵 $u_n(A,\ k_1\oplus k_0)$ 就是系统的状态转移矩阵。对于 $\forall k_0\in I_n$, $\forall k_1\in I_n$, 则我们从式(82)中可以求得系统从 k_0 到 k_1 时状态变量的值。

当然，我们还可以求出在重根情况下的状态方程之解和非齐次状态方程之解，不过，在求非齐次状态方程之解时要用到内积表示，如：一阶非齐次方程为：

$$x^{\Delta}(k)-\lambda x(k)=V(k) \qquad k\in I_n,\ \lambda\in I_n \tag{83}$$

从上述中已知 $x(k)=u_n(\lambda,\ k_1\oplus k_0)x_0$ 是其齐次方程的特解，则如果非齐次方程是可解的话，有:

$$\left\langle v(k)u_n(\lambda,\ k)\right\rangle=\sum_{k=0}^{2^n-1}V(k)u_n(\lambda,\ k)=0 \tag{84}$$

式(84)为其内积展开。仿此方法，非齐次状态方程亦可解出，在此不一一叙述了。

五、线性系统稳定理论和最佳控制的探讨

鉴于拓展 Walsh 变换在新领域中的创用可能性很大，故我们在此探讨一下在现代控制论应用的设想和理论基础。诚然，我们没有能力断言它是否完全正确及理论体系是否严密，但要是能为深入研究这一课题提供略有益助的思路的话，则本节目的已告达到。

5.1 多元逻辑偏导数[2][3]

为了研究稳定性理论，我们先引入多元逻辑偏导数的概念；参照式(7)和式(5)，我们定义广义逻辑偏导数为和式

$$\sum_{k=-m}^{m}p^k\left[\sum_{j=0}^{p-1}A_j\varphi(x_1\cdots\cdots x_{L-1}x_L\oplus jp^{-k-1}x_{L+1}\cdots\cdots x_n)\right] \tag{85}$$

当 $m\to\infty$ 时收敛，则称此极限值为 $\varphi(x_1\cdots\cdots x_n)$ 在点 $(x_1\cdots\cdots x_n)$ 对变元 x_L 的 p 进一阶广义逻辑偏导数，记为:

$$\partial^{[1]}\varphi(x_1\cdots\cdots x_n)/\partial x_L \qquad l=1,\ 2\cdots\cdots n \tag{86}$$

我们尚可得出依 L^2 意义的逆 Walsh 变式和高阶 Walsh 函数的逻辑偏导数为[5][6]:

$$\frac{\partial^{[S]}\varphi(x_1\cdots\cdots x_n)}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\cdots\partial x_n^{j_n}}=\lim_{\substack{ml\to\infty\\ l=1,2,\cdots n}}\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\cdots\cdots\int_0^{m_l}y_1^{j_1}y_2^{j_2}\cdots\cdots y_n^{j_n}\ \varphi^{\Delta}(y_1y_2\cdots\cdots y_n)w(x_1\cdots\cdots x_n;\ y_1\cdots\cdots y_n)dy_1dy_2\cdots\cdots dy_n \tag{87}$$

$$\frac{\partial^{[S]}w(x_1\cdots\cdots x_n;\ y_1\cdots\cdots y_n)}{\partial x_1^{j_1}\ \partial x_2^{j_2}\ \cdots\cdots\ \partial x_n^{j_n}}=y_1^{j_1}y_2^{j_2}\cdots\cdots y_n^{j_n}\ w(x_1\cdots\cdots x_n;\ y_1\cdots\cdots y_n) \tag{88}$$

其中: $j_1+j_2+\cdots\cdots+j_n=s$

$$\frac{\partial^{[S]}\overline{w}(x_1\cdots\cdots x_n;\ y_1\cdots\cdots y_n)}{\partial x_1^{j_1}\ \partial x_2^{j_2}\ \cdots\cdots\ \partial x_n^{j_n}}=(\ominus y_1)^{j_1}(\ominus y_2)^{j_2}\cdots\cdots(\ominus y_n)^{j_n}\ \overline{w}(x_1\cdots\cdots x_n;y_1\cdots\cdots y_n) \tag{89}$$

5.2　序域稳定性的理论探讨及若干推论

从上述讨论中，我们已经看出 Walsh 变换在控制论应用的威力和潜力均相当可观。于是，在上述的基础上，我们提出建立一个序域稳定性定理，它是在 Walsh 变换下的 Liapnuov 方法的拓展。限于篇幅，我们仅给出渐近稳定性的方法，对于全局稳定性也可类推出。类似于时域分析理论，我们要找到一个系统的标量函数 $\Phi(x)$，在此 $\Phi(x)\in L(R+)$，对 x 满足Dirchelt 条件。在时域理论中，$\Phi(x)$满足 Lipschitz 条件的描述是：

$$\Phi=\Phi(x_1\cdots\cdots x_n)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|$$，在$[a,\ b]$区间中任一x有：

$$\left|f(x)-f(x')\right|\leqslant k\left|x'-x\right| \tag{90}$$

相应地，在序域理论中，若$\Phi\in \mathrm{Lipw}^{x}$，在 $0<a<1$ 中有：$|f(x\oplus h)-f(x)|=O(h^a)$。于是用逻辑微分方程描述的线性並矢系统，具有渐近稳定性要求的标量函数 $\Phi(x)$应满足下述条件：

(i)：

$$\Phi(x)=\Phi(x_1\cdots\cdots x_n)=\begin{cases} w(y_1\cdots\cdots y_n;\ x_1\cdots\cdots x_n)\cdot c & \text{当}\ \dfrac{l_i}{p^{m_i}}\leqslant x_i<\dfrac{l_{i+1}}{p^{m_i}} \\ 0 & \text{在其它情况下} \end{cases} \tag{91}$$

其中，m_j，y_j，l_j（$j=1$，$\cdots\cdots n$）为任意常数，且 y_i，$l_i\geqslant 0$，c 为其适当常数因子。

$\Phi(x)$有对 $x_1\cdots\cdots x_n$ 的依 L_1意义一阶逻辑偏导数存在，即：

$$C\frac{\partial^{[1]}W(y_1\cdots\cdots y_n;\ x_1\cdots\cdots x_n)}{\partial x_l}\qquad l=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \tag{92}$$

成立。

(ii)：$\Phi(x)$是正定函数，即$\Phi(x)$为正定的充分必要条件是满足 *Sylester* 定理，在时域中，若：$\Phi(x)=x\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}x_ix_j$，$p_{ij}=p_{ji}$，则满足正定的关系是：

$$|p_{11}|<0,\qquad \begin{vmatrix}p_{11}p_{12}\\ p_{12}p_{21}\end{vmatrix}>0\cdots\cdots|p|>0$$

即 p 的一切主子行列式为正。对应地在序域中，

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=\Phi(x_1\cdots\cdots x_n)=CW(y_1\cdots\cdots y_n;\ x_2\cdots\cdots x_n)\\ &=W(y_1,\ x_1)W(y_2,\ x_2)\cdots\cdots W(y_n,\ x_n)\cdot C=C\prod_{i=1}^{n}exp\left(\frac{2\pi i}{p}(x_i\otimes y_i)\right)\end{aligned} \tag{93}$$

则$\Phi(x)$满足正定条件的关系是：

对所有的满足$\|x\|\leqslant k$ 的非零的 x，将其转换为 $x=\sum_{k=-r}^{\infty}x_kp^{-k}$形式，然后将 y 视为另一变量（如时基）並转换成 $Y=\sum_{k=-r}^{\infty}X_{kp}{}^{-k}$以满足式(93)的形式上需要，则有：

$$\Phi(x) \Longrightarrow C\prod_{i=1}^{n} exp\left(\frac{2\pi i}{p}(x_i \otimes y_i)\right) > 0$$
$$\{\ \|x\| \leqslant k \text{ 的非零} x \qquad (94)$$
$$\Phi(x) \underset{x=0}{\Longrightarrow} C\prod_{i=1}^{n} exp\left(\frac{2\pi i}{p}(x_i \otimes y_i)\right) = 0$$

则称$\Phi(x)$为正定的。

(iii)，$\Phi(x)$的一阶偏导数是负的，则在时域中应下式成立：

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_l} = \left[\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1}\cdots\cdots\cdots\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_n}\right]\begin{pmatrix} f_1(x_1\cdots\cdots x_n) \\ f_2(x_1\cdots\cdots x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1\cdots\cdots x_n)\end{pmatrix} < 0 \qquad (95)$$

在序域理论中，我们考虑一阶偏数逻辑导数的负定关系由下式描述：

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_l} = C\frac{\partial^{[1]}\overline{w}(y_1\cdots\cdots y_n;\ x_1\cdots\cdots x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\cdots\cdots\partial x_n}$$
$$= C\left[(\ominus x_1)(\ominus x_2)\cdots\cdots\cdots(\ominus x_n)W(y_1\cdots\cdots y_n;\ x_1\cdots\cdots x_n)\right] < 0 \qquad (96)$$

满足上述条件的三个条件，我们就称该系统在 Walsh 变换意义下是序域渐近稳定的。

显然，式(94)，(95)，(96)给予我们一个稳定性的概念。如果我们将离散时间系统的 Liapnuov 稳定性分析方法与 Walsh 变换下的系统渐近分析结合起来，它们的联系将更加显然。

综上所述：我们可相应于时域或频域中的泛函分析建立起序域的泛系分析理论，开拓这一理论的意义相当深远，我们拟待另文发表，现给出下述推论：

(一)当 $p=2$时，据 Walsh 函数的功率和相位谱定义有[8]：

$$\varphi_w(0)=0,\ \pi$$
$$\varphi_w\left(\frac{N}{2}\right)=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots \qquad (97)$$
$$\varphi_w(s)=\tan^{-1}\left\{\frac{w_x(2s-1)}{w_x(2s)}\right\},\qquad s=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\ \frac{N}{2}-1$$

可以考虑建立起与频域相类似的序谱分析。

(二)据$\varphi\in\Phi$的 Walsh 变式[6]：

$$f(y_1\cdots\cdots y_{n-1}y_n) = \int_0^{r_1}\cdots\cdots\int_0^{r_n}\varphi(x_1\cdots\cdots x_n)\,\overline{w}(x_1\cdots\cdots x_n;\ y_1\cdots\cdots y_n)\,dx_1\cdots\cdots dx_n \qquad (98)$$

考虑极值问题：

$$C=\inf_{\varphi\in\Phi}\int_0^{\infty}\cdots\cdots\int_0^{\infty}\mu(y_1\cdots\cdots y_n)\left|L(y_1\cdots\cdots y_n)\right|^2 dy_1\cdots\cdots dy_n \qquad (99)$$
$$\|\varphi\|_2=\|L\|_2=1\text{约束条件}$$

建立起序域最佳调节理论，并给出校正的参数。

若我们考虑时序最佳控制的 Walsh 级数综合，可由下述方法进行。

我们考虑式(38)所描述的线性系统，其二次性能指标可描述为[10]：

$$J_{min}=\frac{1}{2}\int_0^{t_d}(x^TQx+u^TRu)dt \tag{100}$$

t_d 为系统终止时间。

它的解为：

$$u^*(t)=R^{-1}B^TZ(t) \tag{101}$$

$Z(t)$ 是 n 维伴随向量，它满足下列的方程：

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & BR^{-1}B^T\\ Q & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}\overset{\triangle}{=}W\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}\\ &x(0)=x_0,\quad z(t_d)=0\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

令：$\tau=t_d-t$，则式(102)变为：

$$\begin{bmatrix}\dot{X}(\tau)\\ \dot{Z}(\tau)\end{bmatrix}=-W\begin{bmatrix}x(\tau)\\ z(\tau)\end{bmatrix} \tag{103}$$

其转移矩阵为：

$$e^{-wt}=\begin{bmatrix}w_{11}(\tau) & w_{12}(\tau)\\ w_{21}(\tau) & w_{22}(\tau)\end{bmatrix} \tag{104}$$

解的(103)结果为：

$$x(\tau)=w_{11}(\tau)x(\tau=0)$$

$$z(\tau)=w_{21}(\tau)x(\tau=0)$$

消去 $x(\tau=0)$ 可得：

$$z(\tau)=w_{21}(\tau)w_{11}^{-1}(\tau)x(\tau) \tag{105}$$

将其代入(101)式，即得到最优控制的状态反馈规律为：

$$u^*(t)=-G(t_d-t)x(t_d-t) \tag{106}$$

式中：$G(t_d-t)\overset{\triangle}{=}-R^{-1}B^Tw_{21}(t_d-t)\,w_{11}^{-1}(t_d-t)$ 为最优反馈增益矩阵。

若我们用 Walsh 级数求解，则把 τ 规范到〔0，1）区间。故令：$\lambda={}^{T}/t_d$

则式(103)变为：$$\begin{bmatrix}\dot{X}(\lambda)\\ \dot{Z}(\lambda)\end{bmatrix}=t_dW\begin{bmatrix}x(\lambda)\\ z(\lambda)\end{bmatrix}\qquad 0\leqslant\lambda<1 \tag{107}$$

我们把 $\dot{X}(\lambda)$ 和 $\dot{Z}(\lambda)$ 展开为 Walsh 级数並取其近似值有：

$$\begin{bmatrix}\dot{X}(\lambda)\\ \dot{Z}(\lambda)\end{bmatrix}=C\Phi(\lambda) \tag{108}$$

对(108)式仿照上述进行两边积分后可得：

$$\begin{bmatrix} x(\lambda) \\ z(\lambda) \end{bmatrix} CP\Phi(\lambda) + \begin{bmatrix} x(\lambda=0) \\ 0_n \end{bmatrix} \tag{109}$$

将(108)和(109)式代入(107)式得:

$$C\Phi(\lambda) = -t_d W\left[CP\Phi(\lambda) + \begin{bmatrix} x(\lambda=0) \\ 0_n \end{bmatrix}\right] \tag{110}$$

令: $$-t_d W\begin{bmatrix} x(\lambda=0) \\ 0_n \end{bmatrix} \stackrel{\triangle}{=} D_2\Phi(\lambda) \tag{111}$$

则式(110)和(111)可整理为:

$$C = -t_d WCP + D_2 \tag{112}$$

最后可整理成:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{2n} \end{pmatrix} = \left[I + t_d W \otimes P^T \right]^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{2n} \end{pmatrix} \tag{113}$$

将(113)代入式(109)求得 $x(\lambda)$ 和 $z(\lambda)$ 的 Walsh 级数近似解，最后由式(101)求得最优反馈控制值。

六、结 京 语

近来，Walsh 函数的应用和其理论探讨相当活跃，在此方面很有声望的 Harmuth 教授曾予言：“Walsh 分析的研究将引起一场革命，就像十七、十八世纪牛顿的微积分所引起的革命那样”[7]。有大量的迹象表明：Walsh 分析与近代科学是紧密相关的[7]。例如：在电磁场的波方程中，可用 Walsh 进行偏微分方程求解：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^{[2]}}{\partial t^{[2]}}W(x,\ t) = \frac{\partial^{[2]}}{\partial x^{[2]}}W(x,\ t) \\ &0 \leqslant x,\ t \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

以及量子力学中的时间空间量子化，波函数求解，群论与场论等问题，均可用 Walsh 函数求解。有关详细地探讨这方面的问题已超过目前作者的水平。况且就文中所述的内容，仍期待于实践检验和读者指教。

本文在写作中得到肖金炳工程师的帮助以及赖万才付教授、林龙威付教授的指教並承蒙南京大学郑维行付教授、苏维宜老师仔细校阅论文底稿和指正文中不妥之处，现谨向他们一並致于衷心地感谢！

作者尚衷心地感谢福建省图书馆外文部的林良溪同志和其他有关同志热忱地帮助作者索取外文资料和有关情报。

参 考 文 献

〔1〕 玉宝“Walsh 函数在波形综合中的应用”《华侨大学学报》1980年第1期

〔2〕 ..维行“广义 Walsh 变式与一极值问题”《数学学报》1979年第3期

〔3〕任福贤、苏维宜、郑维行“广义逻辑导数与逼近论的若干问题”《南京大学学报》1978年第3期

〔4〕P. L. Butzer, H. J. Wagner "Walsh—Fourier Series and the Concept of a derivative", 《Application Analysis》

〔5〕苏维宜"多元函数的逻辑导数与逻辑偏微分方程"《1980年南京大学校庆科学报告论文》

〔6〕苏维宜"关于多元Walsh变式的一极值问题"《南京大学学报》1980年第3期

〔7〕H. F. Harmuth "Sequency theory" 《Academic press》1977

〔8〕N. Ahmed, K, R, Rao "Orthogonal Transforms For Digital Signal Processing" 《Academic Press》1975.

〔9〕陈玉宝"系统工程与泛系分析"尚未发表，1981

〔10〕清华大学"自动控制讲义"1973