

# KHV行星齿轮传动优化程序设计

余大伟

(机械工程系)

## 提 要

渐开线KHV传动只需一对内啮合齿轮,具有体积小重量轻,加工零件少等优点。但由于内外齿轮的齿数相差很少,容易发生干涉,需采用较大啮合角,而对受力和效率均为不利。故一般文献认为KHV传动效率较低,并且速比大时更低,因此只能用于小功率传动。

作者使用合理的内啮合几何尺寸计算方法、较精确的啮合效率公式、和优化技术,设计了通用程序,计算过400余题,取得了较好的参数。所需的啮合角比一般文献要小 $10^\circ$ ,啮合效率大于92%,并且速比大时效率并不降低。由此得出结论:KHV传动能够获得较高效率,可以用于中等功率和大速比传动。为KHV传动的进一步发展提供了方向。

KHV传动的主要构件为一个中心轮K,一个是内齿轮,一个转臂H,和一个角速度与行星轮角速度相同的等速机构V。这种传动理论上虽然可以有多种型式,但是实际应用主要是少齿差传动,所以通常所谓KHV传动即指KHV少齿差传动,或简称少齿差。

少齿差只需一对内啮合齿轮,具有体积小重量轻,加工零件少等优点,是一种很有发展的传动。但也存在缺点:易发生干涉,计算复杂,一般认为啮合效率较低。Кудрявцев教授将KHV传动的特性划属于2K-H正号传动范畴,即效率低,并且传动比大时效率急剧下降〔1〕。少齿差的内、外齿轮的齿数差很少,为了避免干涉往往需采用较大的啮合角。例如两角教授一齿差用 $61^\circ$ ,二齿差为 $46^\circ$ ,三齿差需 $37.4^\circ$ 〔2〕,而按Bolotovskaya教授的封闭图,三齿差需大于 $38^\circ$ 〔3〕。由于啮合角大,对受力和效率均为不利。因此目前KHV少齿差只用于小功率传动。少齿差的啮合角能否降低,啮合效率能否提高,以及速比增大时效率是否不急剧下降,都是涉及到这种传动进一步发展的重要问题。

少齿差计算中参数较多,需先假设某些参数经多次试算才能通过限制条件,但结果还不一定理想。并且目前的内啮合几何尺寸计算方法多不考虑切齿刀具的参数。这种方法计算中似无问题,但是实际制造或安装时,在某些情况下将出问题。考虑刀具参数,加入效率则少齿差的计算更加复杂,所以设计通用程序用电子计算机运算为好。如果程序中只包括所需公

式,虽然可以节省人工计算,但不一定获得较佳参数。只有应用优化技术,才能充分发挥计算机的效能并取得较好结果。作者使用合理的几何尺寸计算方法,较精确的啮合效率公式,和优化技术,设计了通用程序,取得较好的参数。例如啮合角不论一、二、三齿差均比一般文献小 $10^\circ$ 左右,啮合效率达92%以上,并且速比增大时效放并不降低。由这些结果得出新的结论,即 KHV 少齿差传动可以用于中等功率和大速比传动,为 KHV 传动的进一步发展提供了方向。

## 一、合理的几何尺寸计算方法

目前外啮合齿轮的几何尺寸计算方法基本上已统一,尤其是齿条型刀具加工的齿轮,计算方法大多一致。内啮合齿轮是行星传动设计的重要部分,但计算方法尚未统一,并且各种不同方法计算出的结果也各不相同。有些方法将外啮合所用的公式,只改变正、负符号,直接引用于内啮合〔4〕,许多方法不考虑切齿刀具的影响〔4〕。实际上,插齿刀加工的内齿轮与齿条型刀具加工的外齿轮性质并不相同。在计算内啮合几何尺寸时必须考虑刀具参数,否则理论计算中似无问题,但是所得到的尺寸并不能符合好的啮合质量指标,并且在某些情况下,实际制造和安装时会发生干涉,甚至内齿轮无法切齿,渐开线齿廓不能形成。例如两角宗晴教授没有考虑刀具参数,他所设计的少齿差的某些数据如下〔2〕:当齿数差 $Z_d = Z_2 - Z_1 = 5$ 时,内齿轮的变位系数一律用 $X_2 = 0.2$ ;而当 $Z_d = 8$ 时,一律用 $X_2 = 0$ 。前一种情况即五齿差。如果一个模数 $m = 2$ 毫米,齿数 $Z_2 = 65$ 的内齿轮,用新的标准插齿刀(GR71-60)加工,刀具参数为:齿数 $Z_c = 50$ ,变位系数 $X_c = 0.578$ 。则切齿时插齿刀与内齿轮的啮合角 $\alpha_{c2}$ (指插齿终止位置)可按下式计算:

$$\begin{aligned} \text{inv } \alpha_{c2} &= (2 \tan 20^\circ)(X_2 - X_c)/(Z_2 - Z_c) + \text{inv } 20^\circ \\ &= 0.72794(0.2 - 0.578)/(65 - 50) + 0.0149 = -0.0034 \end{aligned}$$

所得出的 $\alpha_{c2}$ 小于零,即实际上渐开线齿廓切不出来。对于后一种情况,即八齿差,由于用 $X_2 = 0$ ,所以 $\alpha_{c2}$ 很容易成负值,因此许多标准插齿刀均不能使用。

作者曾对国内外常遇到的六种内啮合几何尺寸计算方法进行分析讨论〔4〕,在此基础上提出较为合理的方法,基本观点为:“根园决定于刀具,顶园决定于啮合”,“新刀设计,旧刀核验”。简述如下:

### 1、根园决定于刀具

齿轮的齿根园是由切齿刀具的齿顶切成。也即与刀具的参数有关。可按下列公式计算。

$$R_{f2} = Ac_2 + Rac \quad (1)$$

$$R_{f1} = Ac_1 - Rac \quad (2)$$

$$\text{或 } R_{f1} = m(0.5Z_1 - f_h + X_1) \quad (3)$$

其中: $R_{f2}$ ,  $R_{f1}$ 各为内、外齿轮的齿根园。

$Rac$ 为切齿刀具的齿顶园。

$Ac_2$ ,  $Ac_1$ 为切齿终止位置时,刀具与内齿轮或外齿轮间的中心距。

$f_h$ 为滚刀的齿顶高系数。

$X_1$ 为外齿轮的变位系数。

公式(1)和(2)用于插齿刀加工齿轮,公式(3)用于滚刀加工。

## 2、顶圆决定于啮合

径向间隙、重合度、啮合效率、重叠干涉、节点对面齿顶干涉、过渡干涉、滑动系数等许多啮合质量指标都与齿顶圆有关。所以简言之“顶圆决定于啮合”。虽然也可先假设顶圆值再核验必要的啮合指标。但是既然“顶圆决定于啮合”，可按某一项啮合指标先确定顶圆。其中以径向间隙的计算较简单，为此由径向间隙先定顶圆，即：

$$Ra_1 = R_{f2} - A - m \cdot C_{12} \quad (4)$$

$$Ra_2 = R_{f1} + A + m \cdot C_{21} \quad (5)$$

其中： $Ra_2, Ra_1$ ——内、外齿轮的齿顶圆，

$A$ ——内、外齿轮间的中心距，

$C_{12}$ ——外齿轮齿顶与内齿轮齿根间径向间隙系数，

$C_{21}$ ——内齿轮齿顶与外齿轮齿根间径向间隙系数，一般情况下也可取  $C_{12} = C_{21} = C$ 。

作者认为Bolotovskaya教授的方法较好，但是，与许多其他方法一样，将径向间隙系数限制为0.25或0.3，并且规定 $C_{12} = C_{21}$ 〔5〕。这对于外啮合标准齿轮是适用的，然而对于内啮合变位齿轮，尤其对少齿差就不一定合适了。例如，由于径向间隙限制过小，为了避免重叠干涉，按Bolotovskaya的封闭图，三齿差的啮合角不得不大于 $38^\circ$ 。如果这种方法用于一或二齿差，啮合角将很大。而Bolo氏也不曾发表过一或二齿差的封闭图。

实际上，只要保证最小的径向间隙，而没有必要将径向间隙限制于某一定值，并且也可以 $C_{12} \neq C_{21}$ ，而以满足其他啮合指标为原则来确定径向间隙。例如当齿数差少时，可以用较大的径向间隙系数以避免干涉，这样啮合角可不致过大。作者曾用过径向间隙系数为0.6~0.8设计一齿差减速装置，并已实际制造，运行效果良好。

## 3、新刀设计，旧刀核验

插齿刀本身可以看作一个变位齿轮，变位系数为 $X_c$ 。Gavlilenko教授将 $X_c = 0$ 作为中等磨损即平均值来计算〔6〕。表面上似乎考虑了刀具参数。实际上每次刀具用钝重磨后，刀具的变位系数都会改变。不少插齿刀新刀的变位系数 $X_c$ 接近零，而也有些重磨后的极限值 $(X_c)_{min}$ 接近零。例如 $m = 1.5$ 毫米， $Z_c = 68$ ，新刀 $X_c = 0.737$ ，而 $(X_c)_{min} = -0.050$ ；又 $m = 4$ 毫米， $Z = 9$ ，新刀 $X_c = 0$ ，而 $(X_c)_{min} = -0.270$ 。所以 $X_c = 0$ 不是中等磨损与平均值。而且按 $X_c = 0$ 计算实际上还是没有考虑刀具参数。如果只按新刀设计，但是实际切齿用旧刀，则某些情况下会发生干涉，径向间隙过小。按实际切齿刀具的参数来设计也有困难，因为刀具每次重磨参数要变化，不易掌握。因此合理的方法是“新刀设计，旧刀核验”。即按新刀参数设计，用按用钝重磨的刀具极限尺寸来核验。并非所有项目都需重算。“根圆决定于刀具”。所以只核验与根圆或刀具有关项目。这种方法已在KHV及3K等行星传动设计与制造中使用过，详细介绍可参看〔4〕。

## 二、较精确的啮合效率公式

啮合效率是行星传动的重要指标，对于KHV传动尤为重要。因为一般将KHV划属于2K-H正号传动。而这类传动效率较低，速比大时更低，甚至自锁。所以只能用于小功率传动。可见效率问题已影响到某种传动的发展。

行星传动的啮合效率一般可用啮合功率计算，各文献中的介绍虽有出入〔1〕〔7〕

〔8〕，但基本形式如公式(6)。

$$\eta_{HV} = \eta' / [\eta' + (1 - \eta')(1 + Z_1/Zd)] \quad (6)$$

其中： $\eta_{HV}$ —转臂H主动，等速机构V从动时KHV传动的啮合效率。

$\eta'$ —假设转臂相对固定时，转化定轴齿轮机构的啮合效率。

由式(6)可知， $\eta_{HV}$ 与 $Z_1/Zd$ 和 $\eta'$ 有关。 $-Z_1/Zd$ 即减速比， $\eta'$ 相当于定轴齿轮效率。

如果简单地处理 $\eta'$ ，例如可以从手册中选取，一对内啮合可取 $\eta' = 0.98$ ，则当速比为-9时，由式(6)可计算出 $\eta_{HV} = 0.83$ ，而当速比为-99时， $\eta_{HV}$ 只有0.33。这样一来，KHV传动效率低，速比(绝对值)大时更低的论点岂不很容易解释。实际上 $\eta'$ 并非不变的常数，而是随着 $Z_1/Zd$ 或速比而改变。更重要的是 $\eta_{HV}$ 对 $\eta'$ 非常敏感。例如当 $Z_1/Zd = 63$ 时，如果 $\eta' = 0.999$ ，由(6)式得 $\eta_{HV} = 0.940$ ；若 $\eta' = 0.99$ ， $\eta_{HV} = 0.61$ ；而当 $\eta' = 0.98$ 时， $\eta_{HV}$ 只有0.43。所以KHV传动啮合效率的精确度主要决定于 $\eta'$ 的精度。常用的 $\eta'$ 公式为

$$\eta' = 1 - \mu \left( \frac{1}{Z_1} \pm \frac{1}{Z_2} \right) \frac{\pi}{2} \varepsilon \quad (7)$$

其中： $\mu$ —摩擦系数，

$\varepsilon$ —重合度，

+号用于外啮合、-号用于内啮合。

而Kudlyavtzev教授的公式〔1〕更为简单，他取 $\varepsilon = 1.46$ 为常数或平均值，则上式为：

$$\eta' = 1 - 2.3\mu \left( \frac{1}{Z_1} \pm \frac{1}{Z_2} \right) \quad (8)$$

重合度显然不是定值，式(8)虽简单但粗糙。式(7)用于外啮合还可以，但是对内啮合尤其是KHV传动，就不够精确了。因为实际上 $\eta'$ 不是与 $\varepsilon$ 有关，而是与节点位置有关。标准齿轮或高变位齿轮，节点在啮合区中部，式(7)的误差还不小。而角变位齿轮，特别是啮合角大时节点往往在啮合区外，甚至远离啮合区，所以式(7)就不够精确了。而很多内啮合齿轮需要用角变位，其中KHV传动正是用大啮合角。较精确的公式如下：

$$\eta' = 1 - \frac{\pi}{2} \mu K_e \left( \frac{1}{Z_1} \pm \frac{1}{Z_2} \right) \quad (9)$$

系数 $K_e$ 考虑节点位置，各种 $K_e$ 的计算公式可参看〔7〕。

### 三、优化程序设计

KHV传动的几何尺寸计算较复杂。即使用计算器，算一个题也需4至8小时，并且只是通过限制条件。设计通用程序用电子计算机运算是好的方法。如果程序中仅包括所需的计算公式，虽然可以节省人工计算劳力，但是所得到的结果并不一定理想，只有应用优化技术才能充分发挥计算机的效能并取得较好的参数。

我们的问题属于有约束非线性规划，并且计算中有许多超越方程，有些则不是单峰函数。因此应用需要求导数的优化方法是较复杂与困难，不如选用直接搜索优化方法。

直接搜索的方法很多，例如Hooke Jeeve法，Powell法等等，大多是用于无约束优化。利用罚函数法是可以将约束问题转化为无约束问题。作者曾用Powell法加上罚函数法计算，结果不太理想，也用其他三种方法试算，结果各不相同。许多优化方法对数学问题，

尤其是二次函数是很有效的,但是如果直接应用于实际工程问题不一定都很成功。数学上较精确的方法,由于计算复杂和没有考虑到工程问题的某些具体特点,有时也可能不如用简单的方法而收敛快和容易接近优化值。

下面所要介绍的一种方法,考虑了 KHV 传动的特点,效果较好。

1、目标函数为求啮合效率的极大值。约束方程为  $G > 0$  以避免节点对面齿顶干涉,  $G_i > 0$  以避免重叠干涉,  $\epsilon > 1$  以保证啮合的连续性,  $X_1 \geq X_{min}$  以保证小齿轮的轮齿强度。考虑到制造和安装误差,采用  $G > 0.1$  毫米与  $G_i > 0.02$ 。  $G > 0.1$  毫米在初步确定齿顶圆时就需满足,也即由径向间隙和节点对面齿顶干涉先定齿顶圆再计算其他限制条件。Yastlebov 曾证明内啮合齿轮的重合度  $\epsilon$  可以小于 1 [9], 上海也制造过  $\epsilon = 0.85$  的少齿差减速机, 并已成功运行 10 年, 但为可靠起见, 本程序仍用  $\epsilon > 1$ ,  $X_{min}$  根据不同的少齿差而规定数值。

2、由于 KHV 传动设计中有关参数较多, 为了简化计算, 主程序用三维数组 (Fortran 语言规定数组一般不超过三维), 由模数、齿轮齿数, 刀具参数编号组成。而在优化过程中以径向间隙系数  $C$ , 小齿轮变位系数  $X_1$ , 和中心距  $A$  为三自变量。

3、为了简化程序和减少内存, 设计较多的子程序, 子程序中多用变量, 少用数组。子程序 QR 是解渐开线函数的超越方程, 子程序 AB 是当求某渐开线函数的角度时, 先预选一个不超出 1 度的角度, 而迅速解出超越方程。子程序 AX 用于计算中心距与变位系数, 子程序 GE 用于计算约束方程, 子程序 EF 计算效率。

4、优化方法不用罚函数法, 而在 Hooke—Jeeve 方法基础上改进设计, 以能适用于约束非线性问题。简述如下:

由可行区内的初始点出发进行局部搜寻, 如果试验点所得出的效率没有改善, 或者该点不能满足约束条件, 也即已出可行区, 则改变搜寻方向。如果六个方向搜寻均失败, 则减小步长重新开始。反之, 若有一个以上方向搜寻成功, 则以加速步长进行模式搜寻。如果有效, 则从此试验点又开始局部搜寻, 如果无效, 则从上一轮的最佳点开始局部搜寻。当各向均求不出更好的点并且步长小于规定值时, 迭代结束。

5、为了得到较高的效率和较小的啮合角, 迭代应从小啮合角开始。因此由输入数据形成的开始点在可行区外。而改进设计的 Hooke—Jeeve 方法只能在可行区内使用。因此如何在可行区内求得一个合适的初始点是个重要问题。如果这个点选择不当, 最后的结果将不良。所以由开始点出发寻求可行区的初始点也是一个优化过程。

在这个过程中, 如果象一般数学问题那样, 将三个自变量  $A$ ,  $X_1$ ,  $C$  同等对待进行三维搜寻, 则所得到的可行区内初始点不理想, 最后的结果也将远离真正的优化值或者收敛速度很慢。如果只以  $A$  一维搜寻, 速度快些, 结果有所改善, 但仍不是较好值。因为在这个具体工程问题中,  $A$  对约束方程和目标函数的影响要比其他自变量大, 而  $X_1$  与  $C$  各自的影响又相差不大。所以较好的方案是以相同的加速步长从  $X_1$  方向和  $C$  方向同时出发, 两方向的合成方向作为搜寻方向。如果试验点成功, 即接近于可行区, 则加速前进。反之, 若失败, 则以  $A$  方向用较小步长搜寻, 然后再重新由合成方向搜寻。这个方法收敛快, 效果也好。

优化方法的过程简述于图一 1, 程序的流程如图一 2。

程序用 Fortran 语言编制, 每次至少可计算 100 个 KHV 传动, 输出 2800 有用数据。如果计算机容量较大, 则可改变数组体积而增加算题数目。

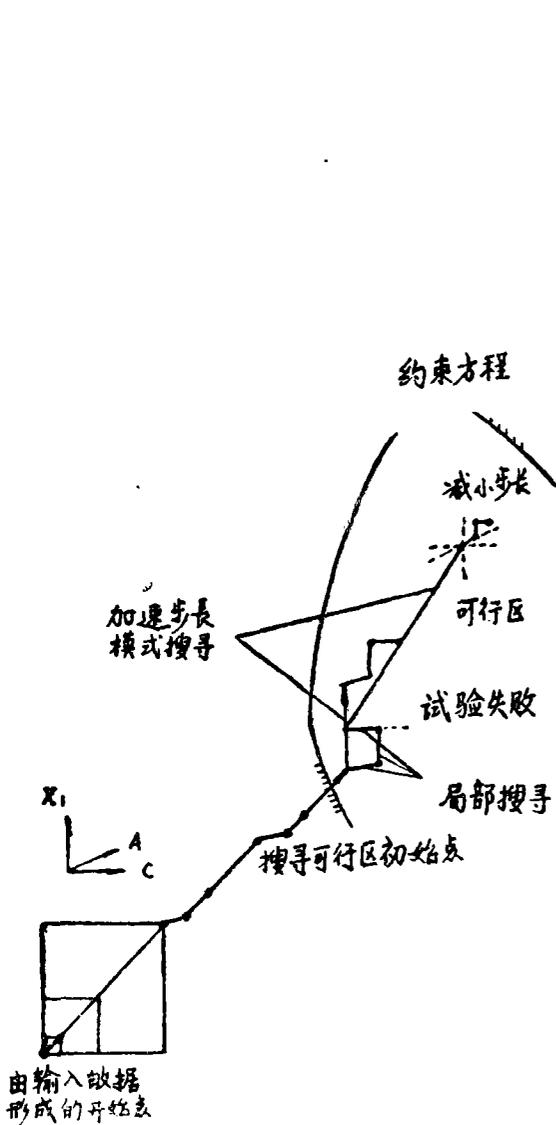


图 1

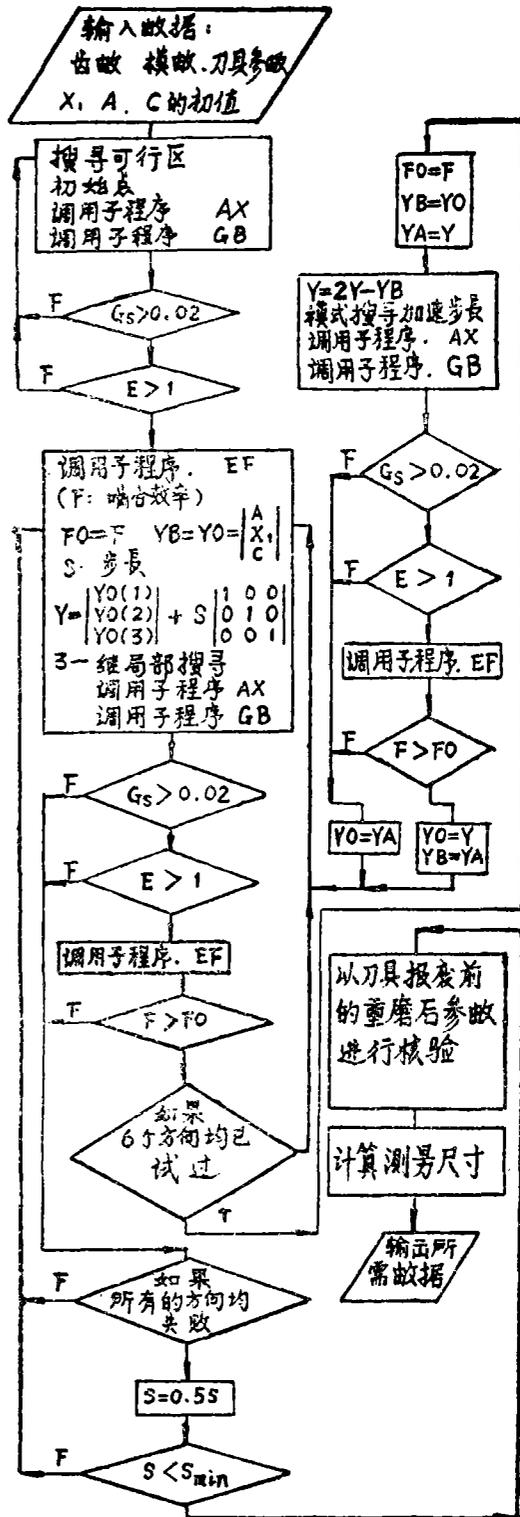


图 2

### 四、结 论

作者曾用此优化程序计算参数不同的400余 KHV 传动, 得到12000有用数据。对结果进行分析后, 可以作出一些新的结论。

1、虽然KHV传动的特性与2K-H正号传动有相似之处, 并且后者已被认为啮合效率较低, 速比大时更低, 但是这个结论用于KHV传动不一定适合。如果采用合理的几何尺寸计算方法, 较精确的效率公式和优化技术, KHV传动可以获得较高效率, 并且速比大时效率不低。为了阐明问题, 列出某些数据于表一1。其中啮合效率按摩擦系数为0.1来计算,  $-Z_1 / (Z_2 - Z_1)$  即转臂H主动, 等速机构V从动时的减速比。由表一1可见速比绝对值增大时, 效率变化不大。另外, 齿数差增加时, 啮合效率虽有所增加, 但是当速比给定时, 二齿差齿轮的齿数是一齿差的两倍, 三齿差则为3倍。虽然当传递相同扭矩时, 三齿差和二齿差所用的模数可以比一齿差小, 可是不会成倍地减少。所以齿数差大时, 结构尺寸也庞大。如果用多级传动以减小尺寸, 则结构复杂, 并且串联机构的效率也可能比单级一齿差还低。为此, 作者认为少齿差中应优先选用一齿差, 并且三齿差以上的少齿差由于结构尺寸较大而不宜使用。这与一般为了提高效率而少用一齿差的观点正好相反。

2、按此优化程序计算所得到的啮合角  $\alpha$  比一般文献中的值要小。为了对比, 某些数值列于表一2。由于啮合角小, 受力情况和啮合效率比其他设计要好, 虽然具体数值还待实验对比。另外, 此程序所设计的400余KHV传动均已通过各种限制条件, 特别是考虑了新、旧刀具的参数, 所以可以用于生产实践并能取得较好的质量指标。作者也曾使用这种方法设计制造了七种减速装置, 效果良好。但是还需进一步做实验以证实理论分析结果。

3、由于KHV传动可以获得较高啮合效率, 并且速比的绝对值增大时, 效率变化不大。因而为这种传动向中等功率和大速比发展提供了方向。再加上体积小重量轻, 加工零件少等优点, KHV传动的前景将不可估量。

表一1

$m$	$Zd$	$Z_1$	$-\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}$	$Zc$	$Xc$	$Xcmin$	$\alpha^{\circ}$	$\eta_{KHV}\%$
5	1	80	-80	20	0.105	-0.19	51.64	92.22
4	1	100	-100	19	0.105	-0.12	51.21	92.30
3	1	150	-150	34	0.337	-0.15	50.59	92.39
2	1	200	-200	38	0.420	-0.17	50.90	92.23
2	1	250	-250	50	0.578	-0.10	50.59	92.34
1.5	1	300	-300	50	0.503	-0.29	50.16	92.34
1.5	1	360	-360	18	0.103	-0.44	50.16	92.46
5	2	100	-50	20	0.105	-0.19	33.96	97.37
4	2	160	-80	25	0.168	-0.19	33.64	97.34
2	2	200	-100	50	0.578	-0.10	33.74	97.33
1.5	2	320	-160	50	0.503	-0.29	33.48	97.26
3	3	120	-40	25	0.167	-0.13	25.88	99.13
2	3	240	-80	50	0.578	-0.10	25.56	99.06
1.5	3	300	-100	50	0.503	-0.29	25.63	99.01

表—2

KHV 传动优化程序设计						两角宗晴		Болотовская		
Zd	Z <sub>1</sub>	m	Z <sub>c</sub>	X <sub>c</sub>	α°	Z <sub>1</sub>	α°	Z <sub>1</sub>	Z <sub>c</sub>	α°
1	60	5	25	0.132	51.99	60	61.06			
1	60	4	19	0.105	52.03	60	61.06			
1	80	3	34	0.337	51.52	80	61.06			
1	80	2	50	0.578	51.52	80	61.06			
1	80	1.5	18	0.103	51.41	80	61.06			
2	60	5	20	0.105	34.34	60	46.03			
2	60	3	25	0.167	34.36	60	46.03			
2	80	2	38	0.420	34.11	80	46.03			
2	80	2	50	0.578	34.30	80	46.03			
3	60	4	25	0.168	26.22	60	37.41			
3	60	1.5	18	0.103	26.13	60	37.41			
3	80	3	25	0.167	26.01	80	37.41			
3	80	1.5	18	0.103	26.13	80	37.41			
3	96	4	25	0.158	25.94			97	50	>38
3	96	2	50	0.578	25.94			97	50	>38
3	96	1.5	50	0.503	25.88			97	50	>38

## 参 考 文 献

- [1] Кудрявцев В. Н., Планетарные Передачи, Машгиз, 1966.
- [2] Morozumi Muneharu, "The Efficiency and the Design of Modified Internal Gearing," Mechanical Researches (Japanese), No. 5, pp. 720-726, 1970.
- [3] Болотовская Т. П., Расчет Коррекции Зубчатых Колес с Помощью Блокирующих Контуров, Уфа., 1958.
- [4] 余大伟 "内啮合齿轮几何尺寸计算方法的讨论" 《矿山机械》 No. 4, pp. 72-78, 1980.
- [5] Болотовская Т. П., Справочник до Геометрическому Расчету Эвольвентных Зубчатых и Червячных Передач, Машгиз, 1963.
- [6] Гавриленко В. А., Зубчатые Передачи в Машиностроении, Машгиз, 1962.
- [7] 余大伟 "齿轮啮合效率计算中存在的问题" 《辽宁机械》 No. 2, pp. 33-42, 1980.
- [8] Morozumi Muneharu, "The Efficiency of Hypocycloid Gear Reducer with Minimum Tooth-difference," Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Japan, No. 31, pp. 119-128, 1971.
- [9] Ястребов В. М., "О Коэффициенте Перекрывания Внутреннего Зацепления с Малой Разницей в Числе Зубьев," Известия Вуз., Машиностроение, No. 8, pp. 23-30, 1965.

---

[10] Mokhtar, S. B., and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

---