

50米以上高层建筑在地震荷载下剪力墙数量的确定

王 全 凤

(华侨大学)

施 士 升

(清华大学)

摘 要

本文将框—剪结构模拟成为下端固定承受地震荷载的悬臂梁,建立了在梁某一水平截面上的剪力平衡方程。用微分方程法推出了考虑剪力墙弯曲变形和框架柱轴向变形时的结构变形曲线,并考虑了框架柱轴向变形对结构自振周期的影响,用能量法导出了周期的计算公式;用施加顶部集中荷载的简化方法模拟了高振型的影响。这样,建立了考虑剪力墙弯曲变形,框架柱轴向变形和高振型影响的数学模型,用于确定剪力墙的最优数量。最后给出一个工程实例说明此数学模型的解。

本文是框架—剪力墙高层建筑(高度50米以下)结构抗地震荷载剪力墙数量优化分析^[1]工作的继续。

在参考资料[1]中,讨论了建筑高度50米以下及高宽比小于4的房屋。如果房屋的高度超过50米,或高宽比大于4,在计算房屋的自振周期、变形和内力时。除考虑剪力墙的弯曲变形和剪切变形,还要考虑框架柱的轴向变形,以及高振型对计算结果的影响,否则会引起较大的误差。本文根据一般工程实践就恒截面两跨框—剪结构在地震荷载下推导出所需公式,以确定剪力墙的数量。

一、考虑框架柱轴向变形影响时的结构变形曲线

1、在倒三角形等效地震荷载 q 作用下

如图一所示的框—剪结构,把框架视作大开洞的剪力墙。在水平地震荷载作用下,同一

层抗侧移构件都有相同的水平位移 y ，而且节点的转角 Φ 相等。

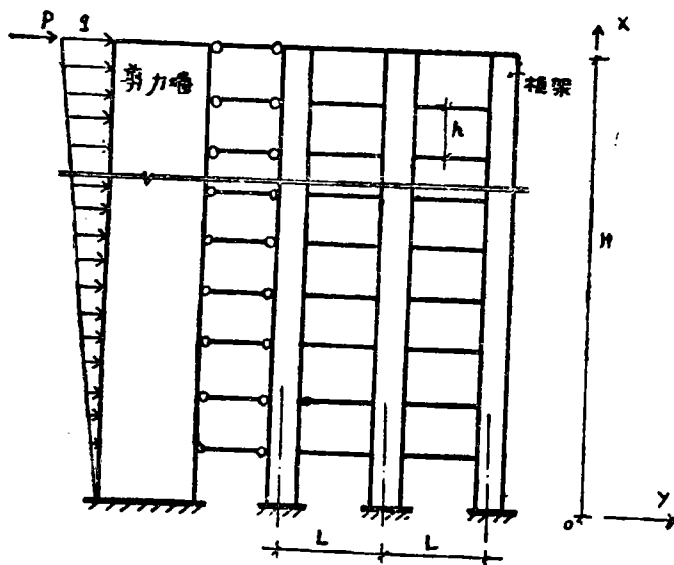


图 一

因为第 i 层框架柱产生单位角位移需要剪力

$$C_A = \frac{12}{h \left(\frac{1}{\sum i_1} + \frac{1}{\sum i_2} \right)}$$

式中 h —房屋的层高；

$\sum i_1$ —第 i 层所有梁的线刚度之和；

$\sum i_2$ —第 i 层所有柱的线刚度之和；

那末如果第 i 层框架节点的转角为 Φ ，则在其上产生弯矩

$$M_1 = C_A h \Phi = C_A h y' (x) \dots \dots \dots (1)$$

如图二所示，假设同一楼层左、右两柱子框架梁梁端的竖向相对位移 u 引起框架梁支座截面的等效转角为 θ_A ，则

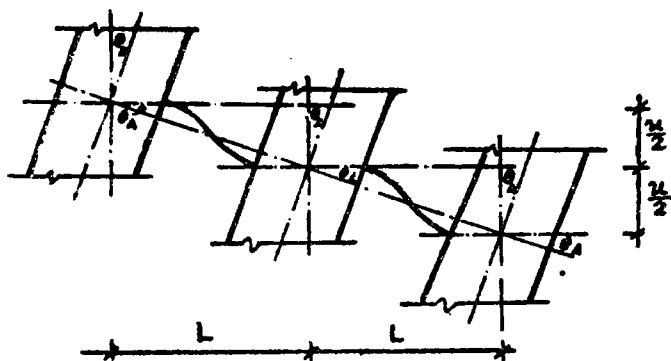


图 二

$$\vartheta_A = \frac{u}{2L}$$

考虑到框架节点转动对 ϑ_A 的影响, 取

$$\vartheta_A = \frac{u}{2L} \cdot K$$

式中: K —考虑框架节点转动对 ϑ_A 的影响系数;

L —框架柱轴线之间的距离。

系数 K 近似值可从下面求得:^[2]

由于框架的边柱在受拉或受压时的轴向变形引起的框架梁支座沉降不同, 产生了反对称的垂直荷载。在这种情况下, 柱子的剪力等于零。图三表示框架节点旋转单位角时的弯矩图。

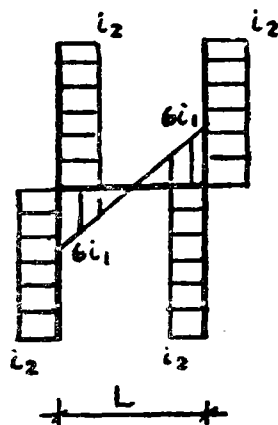


图 三

设框架节点旋转单位角时, 节点的弯矩为 M_2 , 则

$$M_2 = 6i_1 + i_2 + i_2;$$

又设框架梁支座截面固定、沉降差值为 u' 时, 框架梁支座弯矩为 M_0 , 则

$$M_0 = -\frac{6i_1}{L}u';$$

如果不考虑竖向相邻的框架节点旋转的影响, 转角 ϑ'_A 可以从下式求得:

$$(6i_1 + 2i_2)\vartheta'_A + M_0 = 0;$$

解得:
$$\vartheta'_A = -\frac{M_0}{6i_1 + 2i_2};$$

如果考虑相邻节点旋转的影响, 则

$$\vartheta'_A \approx -\frac{M_0}{6i_1 + i_2};$$

∴此时框架梁支座弯矩

$$M_3 = M_0 + 6i_1 \cdot \vartheta'_A = M_0 - \frac{6i_1 \cdot M_0}{6i_1 + i_2};$$

整理得:
$$M_3 = \frac{1}{1 + 6i_1/i_2}M_0 = KM_0;$$

式中:
$$K = \frac{1}{1 + 6i_1/i_2};$$

∴ ϑ_A 引起框架第 i 层节点弯矩

$$M_A = C_A h \cdot \vartheta_A = C_A h \cdot \frac{uK}{2L}; \dots\dots\dots (2)$$

又设在座标 x 水平截面上, 左柱子轴向变形为 u_1 , 则

$$u_1 = \int_0^x \frac{N(x)}{EF_1} dx;$$

式中: $N(x)$ —由于水平荷载产生的柱子单位长度轴向力,

E —混凝土弹性模量;

F_1 —左柱断面积的和。

同理: $u_2 = - \int_0^x \frac{N(x)}{EF_2} dx,$

这样, 左、右两柱竖向相对位移

$$u = u_1 - u_2 = \frac{1}{E} (1/F_1 + 1/F_2) \int_0^x N(x) dx \dots\dots\dots (3)$$

设: $F_1 = F_2$; $B_0 = 2EF_1 L^2$

则(3)式为 $u = \frac{4L^2}{B_0} \int_0^x N(x) dx \dots\dots\dots (4)$

柱子单位长度轴向力

$$N(x) = - \int \frac{H}{x} \frac{M_5}{Lh} dx \dots\dots\dots (5)$$

式中: M_5 —由于剪力墙变形和柱子轴向变形产生的第 i 层一跨框架节点弯矩之和,
 H —房屋的高度。

又令沿柱子单位长度框架节点弯矩之和为 \bar{m}_5 , 则

$$\bar{m}_5 = \sum_{j=1} \frac{(M_5)_j}{h}$$

∵本文以两跨为例, $j=2$; ∴ $\bar{m} = 2M_5/h$;

则(5)式成为 $N(x) = - \frac{1}{2L} \int \frac{H}{x} \bar{m}_5 dx \dots\dots\dots (6)$

把上式代进(4)式得: $u = - \frac{2L}{B_0} \int_0^x \int_0^H \bar{m}_5 dx^2 \dots\dots\dots (7)$

根据 M_5 的定义: $\sum_{j=1} (M_5)_j = M_1 + M_4$

把(1)、(2)式代进上式, 且两边除以 h 得:

$$\bar{m}_5 = \sum_{j=1} \frac{(M_5)_j}{h} = C_A y'(x) + C_A \frac{uK}{2L} \dots\dots\dots (8)$$

由上式可得框架节点弯矩在剪力墙 x 截面产生弯矩

$$M_6 = \int \frac{H}{x} \bar{m}_5 dx \dots\dots\dots (9)$$

相应的剪力 $Q_m = \frac{dM_6}{dx} = - \bar{m}_5$;

∴在剪力墙同一水平截面 x 上的剪力方程

$$Q_{w1} + Q_{w2} = Q_m + Q(x);$$

即 $Q_{w1} + Q_{w2} + \bar{m}_5 = Q(x) \dots\dots\dots (10)$

式中: Q_{w1} —大开洞剪力墙之外剪力墙承受的剪力;

Q_{w2} —大开洞剪力墙承受的剪力;

$Q(x)$ —外荷载产生的剪力;

又因为: $\begin{cases} Q_{w1} = -B_{w1}y''(x); \\ Q_{w2} = -B_{w2}y''(x); \end{cases} \dots\dots\dots(11)$

式中: B_{w1} —大开洞剪力墙之外剪力墙抗弯刚度之和;

B_{w2} —大开洞剪力墙抗弯刚度之和;

把(7)式代进(8)式得:

$$\bar{m}_5 = C_A y'(x) - C_A \frac{K}{B_0} \int_0^x \int_x^H \bar{m}_5 dx^2 \dots\dots\dots(12)$$

把(11)、(12)式代进(10)式, 整理得:

$$B_{w1}y''(x) + B_{w2}y''(x) - C_A y'(x) + C_A \frac{K}{B_0} \int_0^x \int_x^H \bar{m}_5 dx^2 = -Q(x);$$

微分上式并整理得:

$$B_w y''(x) - C_A y'(x) + C_A \frac{K}{B_0} \int_x^H \bar{m}_5 dx - q(x) = 0 \dots\dots\dots(13)$$

式中: $B_w = B_{w1} + B_{w2}$ —全部剪力墙抗弯刚度之和。

剪力墙同一水平截面 x 上的弯矩方程

$$M(x) = M_0 + M_0(x) \dots\dots\dots(14)$$

式中: $M(x)$ —全部剪力墙承受弯矩;

$M_0(x)$ —外荷载引起弯矩。

又因为: $B_w y''(x) = -M_w(x) \dots\dots\dots(15)$

把(9)和(15)式代进(14)式移项整理得:

$$\int_x^H \bar{m}_5 dx = -B_w y'(x) - M_0(x);$$

把上式代进(13)式得考虑框架柱轴向变形影响时的微分方程

$$B_w y''(x) - C_A b^2 y''(x) - C_A \frac{K}{B_0} M_0(x) - q(x) = 0 \dots\dots\dots(16)$$

其中: $b^2 = 1 + KB_w/B_0 \dots\dots\dots(17)$

把(15)式代进(16)式并进行坐标变换得:

$$M'(\xi) - \lambda^2 M(\xi) = -q(\xi) \cdot H^2 - C_A \frac{K}{B_0} \cdot H^2 \cdot M_0(\xi) \dots\dots\dots(18)$$

其中: $\xi = \frac{x}{H}$;

$$\lambda^2 = H^2 C_A b^2 / B_w \dots\dots\dots(19)$$

$$q(\xi) = q\xi;$$

$$M_0(\xi) = -qH^2(1/3 - \xi/2 + \xi^3/6);$$

解(18)式得:

$$M(\xi) = A_3 \cdot ch(\lambda\xi) + B_3 \cdot sh(\lambda\xi) + \frac{qH^2}{\lambda^2} \cdot \xi - qH^2 \eta \cdot \left[\frac{\xi^3}{6} + (1/\lambda^2 - \frac{1}{2})\xi + 1/3 \right] \dots\dots\dots(20)$$

$$\text{其中: } \eta = \frac{K \cdot B_w}{b^2 B_0} \dots\dots\dots(21)$$

由剪力墙边界条件定系数 A_3, B_3 。

从 $Q_w(0) = \frac{1}{2}qH$ 得:

$$B_3 = -\frac{qH^2}{\lambda} \cdot (1-\eta) \cdot (1/2 - 1/\lambda^2),$$

从 $M(1) = 0$ 得:

$$A_3 = -qH^2 \cdot (1-\eta) \cdot Z,$$

$$\text{式中: } Z = \left(-\frac{sh\lambda}{2\lambda} - \frac{sh\lambda}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^2} \right) / ch\lambda \dots\dots\dots(22)$$

把系数 A_3, B_3 值代进(20)式得:

$$M(\xi) = (1-\eta) \cdot M_M(\xi) - qH^2 \cdot \eta \cdot (\xi^3/6 - \xi/2 + 1/3) \dots\dots\dots(23)$$

$$\text{式中: } M_M(\xi) = -qH^2 [Z \cdot ch(\lambda\xi) - sh(\lambda\xi) \cdot (1/2 - \frac{1}{\lambda^2}) / \lambda - \xi/\lambda^2],$$

$$\because Q_w(x) = M'_w(x),$$

$$\therefore Q_w(\xi) = (1-\eta) \cdot Q_M(\xi) - qH \cdot \eta \cdot (\xi^2/2 - 1/2) \dots\dots\dots(24)$$

$$\text{式中: } Q_M(\xi) = -qH \cdot [Z \cdot \lambda \cdot sh(\lambda\xi) - ch(\lambda\xi) \cdot (\frac{1}{2} - 1/\lambda^2) - 1/\lambda^2],$$

$$\because B_w y''(x) = -M_w(x), \dots\dots\dots(15)$$

$$\begin{aligned} \therefore y'(\xi) &= -\frac{1}{B_w} \int M_w(\xi) dx, \\ &= -\frac{qH}{C_A b^2} \left\{ (1-\eta) \cdot [Z \cdot \lambda \cdot sh(\lambda\xi) - ch(\lambda\xi) \cdot (1/2 - 1/\lambda^2) - \xi^2/2] \right. \\ &\quad \left. + \eta \lambda^2 \cdot (\xi^4/24 - \xi^2/4 + \xi/3) \right\} + C_2, \end{aligned}$$

从参考资料[1]得知:当房屋的高度超过50米及高宽比大于4时,剪力墙的剪切变形对计算结果影响甚微,因此可以忽略剪力墙的剪切变形对计算结果的影响,即取

$$y'(0) = 0 \quad \text{得: } C_2 = -\frac{qH}{C_A b^2} \cdot (1-\eta)(1/2 - 1/\lambda^2),$$

代进上式整理得:

$$y'(\xi) = \frac{1}{b^2} (1-\eta) \cdot y'_M(\xi) + \frac{qH}{C_A b^2} \cdot \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi^4/24 - \xi^2/4 + \xi/3) \dots\dots\dots(25)$$

$$\text{式中: } y'_M(\xi) = \frac{qH}{C_A} [Z \cdot \lambda \cdot sh(\lambda\xi) + (1 - ch(\lambda\xi)) \cdot (1/2 - 1/\lambda^2) - \xi^2/2],$$

$$\because y(\xi) = \int y'(\xi) dx,$$

$$\begin{aligned} \therefore y(\xi) &= \frac{qH^2}{C_A b^2} \left\{ (1-\eta) \cdot [Z \cdot ch(\lambda\xi) + (\xi - sh(\lambda\xi)/\lambda) \cdot (1/2 - \frac{1}{\lambda^2}) \right. \\ &\quad \left. - \xi^3/6] + \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi^5/120 - \xi^3/12 + \xi^2/6) \right\} + C_3, \end{aligned}$$

从 $y(0) = 0$ 得:

$$C_3 = -\frac{qH^2}{C_A b^2} \cdot (1-\eta) \cdot Z$$

代进上式整理得:

$$y(\xi) = -\frac{1}{b^2} (1 - \eta) \cdot y_M(\xi) + \frac{qH^2}{C_A b^2} \cdot \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi^5/120 - \xi^3/12 + \xi^2/6) \dots\dots\dots (26)$$

$$\text{式中: } y_M(\xi) = \frac{qH^2}{C_A} [Z \cdot (ch(\lambda\xi) - 1) + (\xi - sh(\lambda\xi)/\lambda) \cdot (1/2 - \frac{1}{\lambda^2}) - \xi^3/6],$$

当不考虑框架柱轴向变形影响时, B_0 趋于无穷大, 则 $b^2 = 1 + \frac{KB_w}{B_0} = 1$,

$$\eta = \frac{KB_w}{b^2 B_0} = 0, \text{ 代进(26)式得 } y(\xi) = y_M(\xi),$$

即为仅考虑剪力墙弯曲变形的位移公式。

当 $\xi = 1$ 时, y 取得最大值

$$y_{max} = -\frac{1}{b^2} (1 - \eta) \cdot (y_M)_{max} + \frac{qH^2}{C_A b^2} \cdot 11\eta \cdot \lambda^2/120, \dots\dots\dots (27)$$

$$\text{式中: } (y_M)_{max} = \frac{qH^2}{C_A} (1/3 - Z),$$

2、在顶部集中荷载 P 作用下

参照(18)式, 当房屋顶部作用一集中力时的微分方程

$$M_C''(\xi) - \lambda^2 M_C(\xi) = -C_A \frac{K}{B_0} \cdot H^2 \cdot M_0(\xi) \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{式中: } M_0(\xi) = -PH \cdot (1 - \xi);$$

$M_C(\xi)$ —在 P 作用下, 剪力墙承受弯矩。

解方程(28)式得:

$$M_C(\xi) = A_4 \cdot ch(\lambda\xi) + B_4 sh(\lambda\xi) \cdot -PH\eta \cdot (1 - \xi) \dots\dots\dots (29)$$

利用剪力墙边界条件定系数 A_4 及 B_4 。

从 $(Q_w)_C(0) = P$ 得:

$$B_4 = \frac{PH}{\lambda} \cdot (1 - \eta);$$

式中: $(Q_w)_C$ —在 P 作用下, 剪力墙承受剪力。

从 $M_C(1) = 0$ 得:

$$A_4 = -\frac{PH}{\lambda} \cdot (1 - \eta) \cdot th\lambda;$$

把系数 A_4 、 B_4 值代进(29)式得:

$$M_C(\xi) = -\frac{PH}{\lambda} \cdot (1 - \eta) \cdot [th\lambda \cdot ch(\lambda\xi) - sh(\lambda\xi)] - PH\eta \cdot (1 - \xi) \dots\dots\dots (30)$$

$$\because (Q_w)_C(x) = M'_C(x);$$

$$\therefore (Q_w)_C(\xi) = -P \cdot (1 - \eta) [th\lambda \cdot sh(\lambda\xi) - ch(\lambda\xi)] + P\eta \dots\dots\dots (31)$$

$$\because y_C''(x) = -M_C(x)/B_w$$

$$\therefore y'_C(\xi) = -\frac{1}{B_w} \int M_C(\xi) dx;$$

$$= \frac{P}{C_A b^2} \left\{ (1-\eta) \cdot [th\lambda \cdot sh(\lambda\xi) - ch(\lambda\xi)] + \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi - \xi^2/2) \right\} + C_4$$

从 $y_c'(0) = 0$ 得:

$$C_4 = \frac{P}{C_A b^2} (1-\eta);$$

把 C_4 值代进上式整理得:

$$y'_c(\xi) = \frac{P}{C_A b^2} \left\{ (1-\eta) \cdot [th\lambda \cdot sh(\lambda\xi) + 1 - ch(\lambda\xi)] + \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi - \xi^2/2) \right\} \dots\dots\dots (32)$$

$$\therefore y_c(\xi) = \int y'_c(\xi) dx,$$

$$\therefore y_c(\xi) = \frac{PH}{C_A b^2} \left\{ (1-\eta) \cdot \left[\frac{th\lambda}{\lambda} \cdot ch(\lambda\xi) + \xi - sh(\lambda\xi)/\lambda \right] + \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi^2/2 - \xi^3/6) \right\} + C_5;$$

从 $y_c(0) = 0$ 得:

$$C_5 = -\frac{PH}{C_A b^2} (1-\eta) \cdot th\lambda/\lambda,$$

把 C_5 值代进上式整理得

$$y_c(\xi) = \frac{PH}{C_A b^2} \left\{ (1-\eta) \cdot \left[\frac{th\lambda}{\lambda} (ch(\lambda\xi) - 1) + \xi - sh(\lambda\xi)/\lambda \right] + \eta \cdot \lambda^2 \cdot (\xi^2/2 - \xi^3/6) \right\} \dots\dots\dots (33)$$

当 $\xi = 1$ 时, $y_c(\xi)$ 取的最大值

$$(y_c)_{max} = \frac{PH}{C_A b^2} \left[(1-\eta) \cdot \left(1 - \frac{th\lambda}{\lambda} \right) + \eta \lambda^2/3 \right] \dots\dots\dots (34)$$

二、考虑框架柱轴向变形影响时, 结构自振周期公式 T 的推导^[4]

结构在其平衡位置时的动能

$$(KE)_{max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (y'_i)^2 \dots\dots\dots (35)$$

$$\therefore y'_i = \omega y_i \dots\dots\dots (36)$$

$$\therefore (KE)_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \dots\dots\dots (37)$$

式中: ω —结构的自振频率;

m_i —集中在第 i 层楼面的质量;

y_i —第 i 层质量的最大位移;

n —房屋的层数;

结构变形势能的最大值

$$(PE)_{max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_i \dots \dots \dots (38)$$

$$\text{式中: } P_i = \frac{W_i H_i}{\sum_{i=1}^n W_i H_i} Q_0 \dots \dots \dots (a)$$

W_i —集中在第*i*层重量,

H_i —第*i*层的高度,

Q_0 —总的地震荷载,

因总能量保持为常数, 故最大动能必定等于最大势能, 即

$$(KE)_{max} = (PE)_{max}.$$

将(37)及(38)式代入上式, 整理得:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n P_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \dots \dots \dots (39)$$

$$\therefore T = 2\pi \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2}{\sum_{i=1}^n P_i y_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

式中: T —结构的自振周期。

$$\text{令: } y_i = \frac{qH^2}{C_A b^2} \cdot y_{1i} \dots \dots \dots (40)$$

代进上式整理得:

$$T = 2\pi \cdot \left(\frac{\frac{qH^2}{C_A b^2} \sum_{i=1}^n m_i y_{1i}^2}{\sum_{i=1}^n P_i y_{1i}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

将(a)式及 $q = \frac{2Q_0}{H}$ 代进上式整理得:

$$T = 2\pi \cdot \left(\frac{\frac{2H}{C_A b^2} \sum_{i=1}^n m_i y_{1i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n H_i}{\sum_{i=1}^n H_i y_{1i}} \right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (41)$$

三、目标函数——地震荷载的计算

对于房屋高度超过50米,如果重量和刚度沿房屋高度分布比较均匀,一般也可以按下式计算地震荷载^[3]

$$Q_0 = C_1 - \frac{D}{T} W \dots\dots\dots (b)$$

式中: C_1 —结构的影响系数;

D —地震影响系数;

W —整个建筑物重量;

但此时高振型的影响要大些,本文用施加顶部集中荷载的简化方法来模拟高振型的影响。地震荷载沿房屋高度仍按三角形分布,第*i*层楼面处的水平地震荷载

$$P_i = \frac{W_i H_i}{\sum_{i=1}^n W_i H_i} \cdot (1 - \xi_1) \cdot Q_0 \dots\dots\dots (42)$$

顶部附加集中力

$$P = \xi_1 Q_0 \dots\dots\dots (43)$$

式中: ξ_1 —地震荷载沿高度分布的调整系数,对框—剪结构取

$$\xi_1 = 0.15T - 0.05 \dots\dots\dots (44)$$

当计算的 ξ_1 值超过0.15时,取 $\xi_1 = 0.15$ 。

∵对应(a)式, $q = \frac{2Q_0}{H}$, 所以对应(42)式

$$q = (1 - \xi_1) \cdot \frac{2Q_0}{H} = 2C_1 (1 - \xi_1) \cdot \frac{DW}{TH} \dots\dots\dots (45)$$

把(b)式代进(43)式得:

$$P = C_1 \xi_1 - \frac{D}{T} \cdot W \dots\dots\dots (46)$$

四、考虑框架柱轴向变形影响时的数学模型

建立数学模型的方法同资料[1]。此时房屋的变形等效于由倒三角形等效荷载和附加集中荷载产生的变形。根据迭加原理把(25)、(27)、(32)和(34)式代进资料[1]中的(12)式得考虑框架柱轴向变形影响时的数学模型:

求: 设计变量*I*, 使得地震荷载 Q_0 为最小, 并满足约束条件:

$$\begin{cases}
 -\frac{qH}{C_A b^2} [(1-\eta) \cdot (1/3 - Z) + 11\eta\lambda^2/120] + \frac{P}{C_A b^2} [(1-\eta) \cdot (1 - \frac{th\lambda}{\lambda}) \\
 + \eta\lambda^2/3] \leq [Y/H], \\
 \max \left\{ -\frac{qH}{C_A b^2} [(1-\eta) \cdot (Z\lambda \cdot sh(\lambda\xi) + (1-ch(\lambda\xi)) \cdot (1/2 - 1/\lambda^2) - \xi^2/2) \dots (47) \right. \\
 + \eta\lambda^2 \cdot (\xi^4/24 - \xi^2/4 + \xi/3)] + \frac{P}{C_A b^2} [(1-\eta) \cdot (th\lambda \cdot sh(\lambda\xi) + 1 - ch(\lambda\xi)) \\
 \left. + \eta\lambda^2 \cdot (\xi - \xi^2/2)] \right\} \leq [\delta/h], \\
 I \geq 0
 \end{cases}$$

几何约束同资料[1]中的(12)式,

式中 I —全部剪力墙惯性矩之和;

$[Y]$ —房屋最大水平位移的允许值;

$[\delta]$ —房屋最大层间位移的允许值。

解此数学模型, 可得满足本文题意要求的最优解。

五、工 程 实 例

除了层数为20层, 建筑平面及设计条件完全同资料[1]中图6的工程实例。

计算出输入数据

$$H = 58.8 \text{米} > 50 \text{米}, \quad \frac{H}{B} = 5.38 > 4,$$

$$C_A = 31526t, \quad K = 0.4709,$$

$$B_0 = 2.497 \times 10^8 t - m^2, \quad I_{w2} = 0.128 \text{米}^4,$$

式中: I_{w2} —全部框架柱抗弯刚度之和;

B —房屋的宽度。

把所需数据代进据(47)式编制的计算程序, 求得最优解

$$I = 95.6158 (\text{米}^4), \quad T = 1.56 \text{秒},$$

此时, $Y_{\max}/H = 1/816; \quad \delta_{\max}/h = 1/600;$

所以所需剪力墙惯性矩

$$I_{w1} = I - \frac{1.5}{1.3} I_{w2} = 95.4681 (\text{米}^4);$$

如果不考虑框架柱轴向变形及高振型的影响, 可求得: $I = 78.2836 (\text{米}^4)$ 。比较这二种结果, 前者比后者大18.0%。从此例也可以看出当房屋的高度超过50米及高宽比大于4时, 必须考虑框架柱轴向变形及高振型的影响。

如果用本文的方法来解决资料[1]中的工程实例, 得最优解 $I = 29.5824 \text{米}^4$, 与资料[1]的答案 $I = 31.54 \text{米}^4$ 相比, 相对差值仅为6.2%。若前者考虑了剪力墙剪切变形, 差值更小。可见当房屋的高度小于50米时, 框架柱轴向变形对计算结果影响不大。

符号的物理意义

- A_3 、 A_4 、 B_3 、 B_4 —待定系数；
 B —房屋的宽度；
 B_{w1} —大开洞剪力墙以外的剪力墙抗弯刚度之和；
 B_{w2} —大开洞剪力墙抗弯刚度之和；
 B_w —全部剪力墙抗弯刚度之和；
 $C_2 \sim C_5$ ——待定系数；
 C_1 —结构的影响系数；
 C_A —第 i 层框架柱产生单位角位移时的剪力；
 D —地震的影响系数；
 E —混凝土的弹性模量；
 F_1 —框架左柱断面积的和；
 F_2 —框架右柱断面积的和；
 H —房屋的总高度；
 H_i —第 i 层楼面的高度；
 h —房屋的层高；
 I_{w1} —大开洞剪力墙以外的剪力墙惯性矩之和；
 I_{w2} —大开洞剪力墙惯性矩之和；
 i_1 —框架梁的线刚度；
 i_2 —框架柱的线刚度；
 j —框架的跨数；
 K —考虑框架节点转动对 ϑ_A 的影响系数；
 L —框架柱轴线之间的距离；
 $M_0(x)$ —水平荷载产生的弯矩。
 $M_w(x)$ —在倒三角形等效地震荷载 q 作用下，剪力墙承受的弯矩；
 $M_c(x)$ —在顶部集中荷载 P 作用下，剪力墙承受的弯矩。
 M_0 —当框架梁支座截面固定、沉降差值为 u' 时的支座弯矩；
 M_1 —由于剪力墙变形产生第 i 层框架节点弯矩；
 M_2 —框架节点旋转单位角时的节点弯矩；
 M_3 —考虑节点旋转时的框架梁支座弯矩；
 M_4 —考虑框架柱轴向变形影响时的第 i 层框架节点弯矩；
 M_5 —由于剪力墙变形和柱子轴向变形产生的第 i 层—跨框架节点弯矩之和；
 \bar{m}_5 —柱子单位长度框架节点弯矩和；
 M_6 —框架节点弯矩在剪力墙 x 截面上产生的弯矩；
 m_i —集中在第 i 层楼面的质量；
 n —房屋的层数；
 $N(x)$ —水平荷载产生的柱子单位长度轴向力；

- P —在房屋顶部作用集中荷载;
 q —倒三角形等效地震荷载;
 Q_0 —总的地震荷载;
 Q_m-M_0 相应的剪力;
 Q_{w1} —大开洞剪力墙以外的剪力墙承受的剪力;
 Q_{w2} —大开洞剪力墙承受的剪力;
 $Q(x)$ —外荷载产生的剪力;
 $(Q_w)_0$ —在顶部集中荷载作用下, 剪力墙承受的剪力;
 T —结构的自振周期;
 u —框架左右两柱子竖向相对位移;
 u_1 —框架左柱子的竖向位移;
 u_2 —框架右柱子的竖向位移;
 W_i —集中在第 i 层的重量;
 W —房屋的总重量;
 y —第 i 层质量 m_i 的最大位移;
 $[Y]$ —房屋最大水平位移的允许值;
 $[KE]_{max}$ —结构在其平衡位置时的动能;
 PE —结构变形势能;
 $[\delta]$ —房屋最大层间位移的允许值;
 ϕ —由于剪力墙变形产生的转角;
 θ_A —由于柱子轴向变形产生的框架梁支座截面的等效转角;
 λ —结构的刚度特征值;
 ξ_1 —地震荷载沿高度分布的调整系数;
 ω —结构的自振频率。

参 考 资 料

1. 清华大学王全凤、施士升: 框架——剪力墙高层建筑结构抗地震荷载剪力墙数量的优化分析, 《土木工程学报》1981年第14卷第3期 P 1—12。
2. К. К. АНТОНОВ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОН-КОНСТРУКЦИЙ (ПРИМЕР РАСЧЕТА), 1966年版。
3. “高层建筑设计及施工规定 (JZ 102-79)”, 1980年出版。
4. S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, Jr., 《VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING》, 4th ed John Wiley and Sons, Inc, 1974。
5. 冯康: “数值计算方法”, 国防工业出版社, 1978年。
6. Khan, F. R. and Sbarounis, J. A., 《INTERACTION OF SHEAR WALLS AND FRAMES》, PROC. ASCE. VOL. 90, NO. ST. 3, P285—335, 1964。
7. 江爱川: “建筑结构优化分析”。