不同分布的随机中心极限定理

吴绍敏

（数　学　系）

一、引　言

设$\{\xi_k\}$是独立同分布的随机变量序列，其均值$E\xi_k=0$，方差$D(\xi_k)=1$，$(k=1、2\cdots)$。记

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

$$\zeta_n=\frac{\eta_n}{\sqrt{n}}$$

那么独立同分布的中心极限定理成立，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\zeta_n<x\right)=\Phi(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)\tag{1}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du$$

如以正整值随机变量ν_n代替n，即得

$$\zeta_{\nu_n}=\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}$$

那么在什么条件下

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\zeta_{\nu_n}<x\right)=\Phi(x)\tag{2}$$

成立呢？

因随机和变量在随机游动，序列分析，系统可靠性及Monte Carle方法有关等方面都有广泛的应用，于是引起数学工作者的重视和研究。特别是随机中心极限定理的研究，已经得到一些结果。

最初，是假定$\nu_n\xrightarrow{p}\infty$且与$\{\xi_k\}(k=1、2\cdots)$独立的条件下，证明了(2)的正确性[1]。其次，F·Anscombe把ν_n与$\{\xi_k\}$独立的条件去掉，改为$\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{p}C$（C是常数）时，证明(2)成立[2]。后来，A·Rēnyi又把条件改为更一般的$\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{p}\lambda$，（$\lambda$是正值离散随机变量）证明了(2)成

立[3]。Doeblin－Anscombe去掉同分布的条件并在$\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{p}C$（C是常数）证明了(2)成立[4]。

本文将去掉$\{\xi_k\}$（$k=1$、$2\cdots$）是同分布的条件，在更一般的条件下，证明随机中心极限定理成立，从而将上述的结果归为本文的特例。

二、不同分布的随机中心极限定理

为便于证明下面的定理，先将A·Rényi[3]的三个引理阐述于下：

引理1，若随机变量序列x_n有一极限分布，z_n和y_n是两个随机变量序列，且$z_n\xrightarrow{p}1$，$y_n\xrightarrow{p}0$，则$x_nz_n+y_n$与x_n有同一极限分布。

引理2，若随机变量x_n的分布函数趋于一极限分布和$y_n\xrightarrow{p}0$ 则$x_ny_n\xrightarrow{p}0$。

引理4，若$t_n(n=1、2\cdots)$是独立的随机变量序列，置

$$\sigma_n=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}t_k,\qquad B_n\to+\infty$$

若σ_n的分布函数趋于一极限分布，则σ_n在任何具有正概率的条件下的条件分布趋于同一个极限分布。

下面来证明本文所阐述的定理

设$\{\xi_k\}(k=1、2\cdots)$是随机变量序列，具有有限均值和方差，$E\xi_k=a_k$，$D(\xi_k)=\sigma_k^2\neq0$ $(k=1、2\cdots)$，记

$$\zeta_n=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-a_k\right)\qquad \zeta_{\nu_n}=\frac{1}{B_{\nu_n}}\sum_{k=1}^{\nu_n}\left(\xi_k-a_k\right)$$

$$B_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)^{1/2}\qquad B_{\nu_n}=\left(\sum_{k=1}^{\nu_n}\sigma_k^2\right)^{1/2}$$

下面的记号相同。

定理1，设$\{\xi_k\}$是随机变量序列，若$\nu_n\xrightarrow{p}\infty$，事件$(\nu_n=k)$与事件$(\xi_k<x)$独立，且

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\zeta_n<x\right)=\Phi(x)$$

则
$$\lim_{n\to\infty}P\left(\zeta_{\nu_n}<x\right)=\Phi(x)$$

证明：已知$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\zeta_n<x\right)=\Phi(x)$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，一定存在一个N，当$n>N$时，有
$$\Phi(x)-\varepsilon<P(\zeta_n<x)<\Phi(x)+\varepsilon$$

因$\nu_n\xrightarrow{p}\infty$，那么对上述的$\varepsilon>0$和N，一定存在一个$N_1$，当$n>N_1$时，$P(\nu_n\leqslant N)<\varepsilon/2$，即$P(\nu_n>N)\geqslant1-\varepsilon/2$。

$$\because\quad P\left(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n>N\right)\leqslant P\left(\zeta_{\nu_n}<x\right)=P\left(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n\leqslant N\right)+$$
$$P\left(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n>N\right)\leqslant P\left(\nu_n\leqslant N\right)+P\left(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n>N\right)$$

即 $\sum\limits_{k>n}^{\infty} P(\zeta_k<x,\ \nu_n=k)\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x)\leqslant\varepsilon/2+\sum\limits_{k>n}^{\infty} P(\zeta_k<x,\ \nu_n=k)$

$$\sum_{k>n}^{\infty} P(\zeta_k<x)P(\nu_n=k)\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x)\leqslant\varepsilon/2+\sum_{k>n}^{\infty} P(\zeta_k<x)P(\nu_n=k)$$

$$[\Phi(x)-\varepsilon]\sum_{k>n}^{\infty} P(\nu_n=k)\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x)\leqslant\varepsilon/2+[\Phi(x)+\varepsilon]\sum_{k>n}^{\infty} P(\nu_n=k)$$

故有 $[\Phi(x)-\varepsilon]P(\nu_n>N)\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x)\leqslant\varepsilon/2+[\Phi(x)+\varepsilon]$

$\Phi(x)-3\varepsilon/2\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x)\leqslant\Phi(x)+3\varepsilon/2$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{\nu_n}<x)=\Phi(x)$ 证毕。

推论：设$\{\xi_k\}$是独立的随机变量序列，若$\nu_n\xrightarrow{p}\infty$，事件$(\nu_n=k)$与事件$(\xi_k<x)$独立，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/B_n^2\int_{|x-a_k|<\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{\nu_n}<x)=\Phi(x)$

其中τ是任意正数，$F_k(x)$是ξ_k的分布函数。显然，〔1〕中ch、Ⅲ，Theorem 2是推论的特例。

定理 2，设$\{\xi_k\}$ $(k=1、2\cdots)$是独立的随机变量序列，$\nu_n=[n\lambda]$，λ是正值离散随机变量，其全体可能值是$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots$。若

$$\lim_{n\to\infty} 1/B_n^2\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)=0$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} p(\zeta_{[n\lambda]}<x)=\Phi(x)$

证明：根据假设条件，知 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_n<x)=\Phi(x)$

$$p(\zeta_{[n\lambda]}<x)=\sum_{k=1}^{\infty} p(\zeta_{[n\lambda_k]}<x|\lambda=\lambda_k)p(\lambda=\lambda_k)$$

根据A·Rényi的引理 4 知

$$\lim_{n\to\infty} p(\zeta_{[n\lambda_k]}<x|\lambda=\lambda_k)=\lim_{n\to\infty} P(\zeta_{[n\lambda_k]}<x)=\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n<x)=\Phi(x)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} P(\zeta_{[n\lambda]}<x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} P(\zeta_{[n\lambda_k]}<x|\lambda=\lambda_k)P(\lambda=\lambda_k)=$$

$$\Phi(x)\sum_{k=1}^{\infty} P(\lambda=\lambda_k)=\Phi(x)。$$

其中 $\zeta_{[n\lambda_k]}=1/B_{[n\lambda_k]}\sum\limits_{j=1}^{[n\lambda_k]}(\zeta_i-a_i)$ 证毕。

推论，$\{\xi_k\}$是独立随机变量序列，若$\nu_n=[n\lambda]$ $(a\cdot s)$，且 Lindeberg 条件成立，则

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{\nu_n}<x)=\Phi(x)$

证明：因

$$P(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n=[n\lambda])\leqslant p\,(\zeta_{\nu_n}<x)=P(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n=[n\lambda])+$$
$$P(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n\neq[n\lambda])\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x,\ \nu_n=[n\lambda])+P(\nu_n\neq[n\lambda])$$

即 $$P(\zeta_{[n\lambda]}<x)\leqslant P(\zeta_{\nu_n}<x)\leqslant P(\zeta_{[n\lambda]}<x)$$

由定理2知 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{\nu_n}<x)=\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{[n\lambda]}<x)=\Phi(x)$。

定理3，$\{\xi_k\}$是独立的随机变量序列，且满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_n<x)=\Phi(x)$

(2) $m=inf\ \{\sigma_k^2,\ k\geqslant1\}>0,\ M=Sup\ \{\sigma_k^2,\ k\geqslant1\}<+\infty$

那么，若$\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{p}\lambda$，$\lambda$是正值离散随机变量，其全体可能值是 $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda\cdots<\lambda_k<\cdots$。则

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{\nu_n}<x)=\Phi(x)$。

证明：(1) 先证 $\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}\xrightarrow{p}1$。

因$\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{p}\lambda$，$\frac{[n\lambda]}{n}\xrightarrow{p}\lambda$，$\therefore\frac{\nu_n}{n}-\frac{[n\lambda]}{n}\xrightarrow{p}0$。因之，对任给的$\sigma>0$和$\delta>0$，一定存在一个$n_1$，当$n>n_1$时有$P\left(\left|\frac{\nu_n}{n}-\frac{[n\lambda]}{n}\right|>\sigma\right)<\delta/2$，那么对任意给定的$\varepsilon>0$和上述的$\delta>0$，当$n>n_1$时就有

$$P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon,\ \left|\frac{\nu_n-[n\lambda]}{n}\right|>\sigma\right)+$$
$$P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon,\ \left|\frac{\nu_n-[n\lambda]}{n}\right|\leqslant\sigma\right)\leqslant P\left(\left|\frac{\nu_n-[n\lambda]}{n}\right|>\sigma\right)+$$
$$P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)\leqslant\delta/2+$$
$$p\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)$$

$$\because\ P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)=P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon,[n\lambda]-\right.$$
$$\left.n\sigma\leqslant\nu_n\leqslant[n\lambda]+n\sigma\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon,[n\lambda_k]-n\sigma\leqslant\nu_n\leqslant[n\lambda_k]+\right.$$
$$\left.n\sigma,\ \lambda=\lambda_k\right)$$

$\because \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\lambda=\lambda_k\right)=1$，$\therefore$对上述的 $\delta>0$ 一定存在一个 S_1，当 $S>S_1$ 时有

$$\sum_{k=S+1}^{\infty} P\left(\lambda=\lambda_k\right)<\delta/2,$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{B\nu_n}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon, [n\lambda_k]-n\sigma\leqslant\nu_n\leqslant[n\lambda_k]+n\sigma,\ \lambda=\lambda_k\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{S} P\left(\left|\frac{B\nu_n}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon, [n\lambda_k]-n\sigma\leqslant\nu_n\leqslant[n\lambda_k]+n\sigma\right)+\delta/2$$

而 $\sum_{k=1}^{S} P\left(\left|\frac{B\nu_n}{B_{[n\lambda_k]}}\right|>\varepsilon, [n\lambda_k]-n\sigma\leqslant\nu_n\leqslant[n\lambda_k]+n\sigma\right)$

$$=\sum_{k=1}^{S} P\left\{\bigcup_{l=[n\lambda_k]-n\sigma}^{[n\lambda_k]+n\sigma}\left(\left|\frac{B_l}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon, \nu_n=l\right)\right\}$$

$\because B_n \uparrow +\infty$　$\therefore$当 $[n\lambda_k]-n\sigma\leqslant l\leqslant[n\lambda_k]+n\sigma$ 时

$$\left|\frac{B_l}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|\leq\left|\frac{B_{[n\lambda_k]+n\sigma}}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right| \text{或} \left|\frac{B_{[n\lambda_k]-n\sigma}}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|$$

$$\because 1<\frac{B_{[n\lambda_k]+n\sigma}}{B_{[n\lambda_k]}}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{[n\lambda_k]+n\sigma}\sigma_i^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{[n\lambda_k]}\sigma_i^2\right)^{1/2}}=$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{[n\lambda_k]}\sigma_i^2+\sum_{i=[n\lambda_k]+1}^{[n\lambda_k]+n\sigma}\sigma_i^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{[n\lambda_k]}\sigma_i^2\right)^{1/2}}$$

$$\leq\left(1+\frac{n\sigma M}{m[n\lambda_k]}\right)^{1/2}\leq 1+\frac{\sigma M}{\lambda_1 m}\qquad(\text{当}n>n_2\text{时})$$

因 σ 可以任意小，所以可选取 σ 使得 $\sigma M/\lambda_1 m<\varepsilon$。

$\therefore \left(\left|\frac{B_{[n\lambda_k]+n\sigma}}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon\right)$是不可能事件。

同理 $\left(\left|\frac{B_{[n\lambda_k]-n\sigma}}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon\right)$也是不可能事件。

$$\therefore P\left(\bigcup_{[n\lambda_k]-n\sigma\leq l\leqslant[n\lambda_k]+n\sigma}\left(\left|\frac{B_l}{B_{[n\lambda_k]}}-1\right|>\varepsilon,\ \nu_n=l\right)\right)=0$$

取 $N=max\ (n_1,\ n_2)$，那么综上所述，对任给的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在一个 N，当 $n>N$ 时有

$$P\left(\left|\frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}-1\right|>\varepsilon\right)<\delta$$

$$\therefore\quad \frac{B_{\nu_n}}{B_{[n\lambda]}}\xrightarrow{p}1$$

（二）因

$$\zeta_{\nu_n}=\zeta_{[n\lambda]}+\frac{B_{[n\lambda]}}{B_{\nu_n}}\left(\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right)+\zeta_{[n\lambda]}\left(\frac{B_{[n\lambda]}}{B_{\nu_n}}-1\right)$$

其中 $\eta_{\nu_n}=\sum_{k=1}^{\nu_n}\left(\xi_k-a_k\right)$， $\eta_{[n\lambda]}=\sum_{k=1}^{[n\lambda]}(\xi_k-a_k)$

因 $\left(\frac{B_{[n\lambda]}}{B_{\nu_n}}-1\right)\xrightarrow{p}0$，再根据定理 2 和 $Renyi$ 的引理 2 知。

$$\zeta_{[n\lambda]}\left(\frac{B_{[n\lambda]}}{B_{[\nu_n]}}-1\right)\xrightarrow{p}0$$

现在证明 $\left(\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right)\xrightarrow{p}0$

$\because\ \frac{\nu_n}{n}-\frac{[n\lambda]}{n}\xrightarrow{p}0$ $\therefore$ 对任意给 $\delta>0$ 和 $\sigma>0$，一定存在一个 n_1，当 $n>n_1$ 时

$$P\left(\left|\frac{\nu_n-[n\lambda]}{n}\right|>\sigma\right)<\delta/3.$$

那么对任意给的 $\varepsilon>0$ 和上述的 $\delta>0$，当 $n>n_1$ 时有

$$P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda]\right|>n\sigma\right)+$$

$$P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon,\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)\leqslant P\left(\left|\nu_n-[n\lambda]\right|>n\sigma\right)+$$

$$P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon,\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)\leqslant\delta/3+P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon,\right.$$

$$\left.\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)$$

$$\because\quad P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda]\right|\leqslant n\sigma\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda_k]}}{B_{[n\lambda_k]}}\right|\right.$$

$>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda_k]\right|\leqslant n\sigma,\ \lambda=\lambda_k\Big)$ 因 $\sum_{k=1}^{\infty}P(\lambda=\lambda_k)=1$ $\therefore$ 存在一个 S_1 当 $S>S_1$

时 $\sum\limits_{k=S+1}^{\infty} P(\lambda=\lambda_k)<\delta/3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda_k]}}{B_{[n\lambda_k]}}\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda_k]\right|\leqslant n\sigma,\ \lambda=\lambda_k\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s} P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda_k]}}{B_{[n\lambda_k]}}\right|>\varepsilon,\ \nu_n-[n\lambda_k]\right|\leqslant n\sigma\Big)+\delta/3。$$

而
$$\sum_{k=1}^{s} P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda_k]}}{B_{[n\lambda_k]}}\right|>\varepsilon,\ \left|\nu_n-[n\lambda_k]\right|\leqslant n\sigma\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s} P\left(\max_{|l-[n\lambda_k]|\leqslant n\sigma}\left|\sum_{i=[n\lambda_k]}^{l}(\zeta_i-a_i)\right|>\varepsilon B_{[n\lambda_k]}\right)$$

由 *Hājek* 及 *Rēnyi* 不等式得

$$\sum_{k=1}^{s} P\left(\max_{|l-[n\lambda_k]|\leqslant n\sigma}\left|\sum_{i=[n\lambda_k]}^{l}(\xi_i-a_i)\right|>\varepsilon B_{[n\lambda_k]}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s}\frac{1}{\varepsilon^2 B^2_{[n\lambda_k]}}\left(\sum_{i=[n\lambda_k]-[n\sigma]}^{[n\lambda_k]+n\sigma]}\sigma_i^2\right)\leqslant \sum_{k=1}^{s}\frac{2[n\sigma]M}{\varepsilon^2[n\lambda_k]\mathbf{m}}$$

$$=\frac{2\sigma M}{\varepsilon^2\mathbf{m}}\sum_{k=1}^{S}\frac{1}{\lambda_k}\quad（当 n>n_2 时）$$

由于 σ 可任意小，故可选 σ 使满足

$$\frac{2\sigma}{\varepsilon^2}\cdot\frac{M}{\mathbf{m}}\sum_{k=1}^{S}\frac{1}{\lambda_k}<\delta/3$$

因此，对预先给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在一个 $N=\max(n_1,\ n_2)$，当 $n>N$ 时有

$$P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right|>\varepsilon\right)<\delta$$

即
$$\left(\frac{\eta_{\nu_n}-\eta_{[n\lambda]}}{B_{[n\lambda]}}\right)\xrightarrow{p}0$$

再根据 *Rēnyi* 的引理 1 知 ζ_{ν_n} 与 $\zeta_{[n\lambda]}$ 有相同的极限分布，由定理 2 知 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\zeta_{\nu_n}<x)=\Phi(x)$ 证毕。

当 $\{\xi_k\}$ 是独立同分布的随机变量序列且 $E\xi_k=0$，$D\xi_k=1$ 时，即得 *Rēnyi* 的定理 2[3]

特别，若 $\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{p}C$，即得 *E.T.Anscombe* 所证明的结论，就是[3]中的定理 1.

当 $\{\xi_k\}$ 是独立变量序列，且 $E\xi_k=0$，$D(\xi_k)=1$，又 $\nu_n/n\xrightarrow{p}C$ 时，就是 *Doeblin－Anscombe* 定理[4]。

三、附 注

1、在定理2、3中，若把$[n\lambda]$换为$[\omega(n)\lambda]$，把$\nu_n/n \xrightarrow{p} \lambda$ 换为 $\nu_n/\omega(n) \xrightarrow{p} \lambda$，其中$\omega(n)$是$\to\infty$(当$n\to\infty$)的正数，定理仍然成立。

2、在定理2、3中，若$[n\lambda_k]<1$，则规定$\zeta_{[n\lambda_k]}=0, B_{[n\lambda_k]}=1$

参 考 文 献

〔1〕G, H.Hardy, Divergent Series (oxford 1949)

〔2〕F.J.Anscombe Large-Sample Theory of Sequential estimation proc, Carmbidge, phi Soc. 48 (1952) p600

〔3〕A, Renyi, on The Central limit Theorem for the sum of a random number independent random Varibles.Acta MaTh.Acal sci Hung 11 (1960) p97-102

〔4〕Yuan Shih Chow Henry Teicher, probability theory. p317