

线性网络状态空间轨道的计算机分析

机械工程系 张秋凝

提 要

本文在简述了线性网络的微分方程和状态空间轨道的求解方法的基础上,讨论了利用计算机分析线性网络的状态空间轨道的过程,并给了RLC串联电路计算的实现程序,分析了电路在不同参数下与由计算机显示的相应轨道曲线之间的关系。

一、引 言

线性电路的动态过程是由电路中各种元件的参数特性如电容器电压 $U_c(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 等的变化率决定的,为了刻划出这种电路在某时刻的响应,传统的做法是依电路元件参数列出微分方程并对其进行求解,这种方法的缺点是除了运算麻烦以外,尚无法直观地描述出电路的变量在过渡过程中的状态。鉴于这个原因,本文介绍了一种更直观的方法——状态空间法^[1]。它是把电路的性状抽象为在两维空间中从初始状态开始的一条轨道,轨道上的某一点确定了对应时刻电路的 $i_L(t)$, $u_c(t)$ 变量响应的相应值。籍助于计算机辅助设计,可直接在计算机显示器或行印机上显示出电路动态过程的状态轨道,依其曲线形状就可一目了然地了解到电路的过渡过程是稳定的或振荡的^[2]。

2.1, 状态空间轨道

现以线性定常RLC串联电路的零输入响应

($u_s(t) = 0$) 为例,设电路的初值 u_c , $i_L(0)$ 为任意常数。电路图如图1。

依元件的电流电压关系和KVL方程(克希霍夫电压定律)可得:

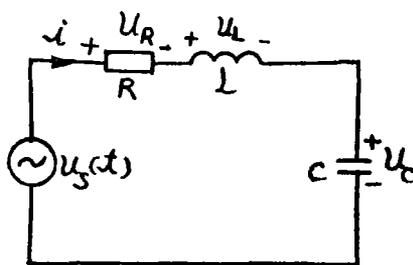


图1 RLC串联电路R, L, C
分别为电阻、电感、电容

$$\left. \begin{aligned} C \frac{du_c(t)}{dt} &= i_L(t) & t \geq 0 \\ L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + u_c(t) &= 0 & t \geq 0 \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

以 $i_L(t)$ 为横坐标, $u_c(t)$ 为纵坐标所构成的平面称为电路的状态空间, 任何瞬时电路的响应 $[i_L(t), u_c(t)]$ 即为 $i_L(t) - u_c(t)$ 平面上某点所对应的坐标, 因此当 t 由 0 增加到 ∞ 大时, 点 $[i_L(t), u_c(t)]$ 将描绘出一条从 $(i_L(0), u_c(0))$ 起始的曲线, 此曲线便称为状态空间轨道。对空间轨道的计算一般采用近似法逐点逼近, 但计算量很大, 且为近似值。如直接用计算机对描述电路的微分方程之解编程, 计算机便很清晰直观地显示 $i_L(t) - u_c(t)$ 关系曲线的形状, 依其形状就可确定电路响应的特性。

二、线性电路的微分方程及其求解

2.1, 微分方程的解

由式①可得描述RLC串联电路零输入响应的方程为^[3]:

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0 \quad \textcircled{2}$$

显然这是一个线性齐次二阶常微分方程, 其特征方程为: $LCS^2 + RCS + 1 = 0$

$$\text{特征方程的根为: } S_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -A \pm \sqrt{A^2 - W^2}$$

$$\text{式中: } A = \frac{R}{2L}, \quad W = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2a)$$

依特性根(又称电路的固有频率)的性质, 可把电路的零输入响应分为下列几种情况:

1、当 $A > W$ 时, S_1, S_2 为相异实根, 经对微分方程②求解, 可得:

$$\left. \begin{aligned} u_c(t) &= \frac{i_L(0)}{(s_1 - s_2)c} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{u_c(0)}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}) \\ i_L(t) &= \frac{i_L(0)}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{cu_c(0)s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t}) \end{aligned} \right\} \textcircled{3}$$

由③式可知该状态下的电路为过阻尼, 响应将按指数规律衰减, 其状态空间轨道如图2。由计算机显示的这种曲线形状说明了该电路是稳定的, 且单调下降, 电路不会有振荡或超调出现, 但过渡过程会相应长些。

2, 当 $A < W$ 时, s_1, s_2 为共轭复根, 微分方程②的解为:

$$\left. \begin{aligned} u_c(t) &= \frac{i_L(0)}{W_1 c} e^{-At} \sin W_1 t + u_c(0) e^{-At} \left(\cos W_1 t + \frac{A}{W_1} \sin W_1 t \right) \\ i_L(t) &= i_L(0) e^{-At} \left(\cos W_1 t - \frac{A}{W_1} \sin W_1 t \right) - \frac{cW_1^2}{W_1} u_c(0) e^{-At} \sin W_1 t \end{aligned} \right\} \textcircled{4}$$

$$\text{式中 } W_1 = \sqrt{W^2 - A^2}$$

此种状态下的电路为欠阻尼, 响应将按指数规律衰减振荡, 状态空间轨道为螺旋线, 如图(3)所示。由曲线形状, 可以看出它的过渡过程有超调出现, 但最终是稳定的。而超调的不足可弥补电路的过渡过程响应时间慢的缺点。

3、当 $A = 0$ 时, s_1 、 s_2 为纯虚数, 微分方程的解为:

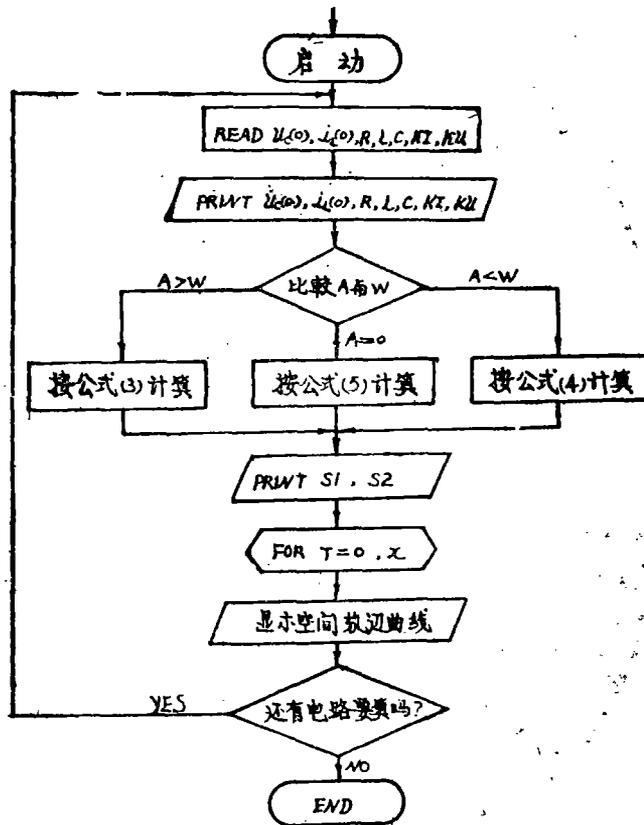
$$u_c(t) = u_c(0)\cos\omega t + \frac{i_L(0)}{\omega C}\sin\omega t \quad (5)$$

$$i_L(t) = i_L(0)\cos\omega t - u_c(0)\omega t\sin\omega t$$

电路为无损耗, 它的响应将发生振荡, 其空间轨道为椭圆。如图(4), 由图所示的结果告诉我们, 具有这种曲线形状的电电路将是一个不稳定的电路。

三、求解状态方程空间轨道的计算机程序

3.1, 流程图 [4] (见图5)



3.2, 实现程序*

```

REM THE STATE-SPACE TRAJECTORY OF RLC SERIES
CIRCUIT (RLC串联电路的状态空间轨道)
10 PRINT "UO=", "IO=", "R=", "L=", "C=", "KI=",
"KU="
20 INPUT UO, IO, R, L, C, KI, KU
    
```

```

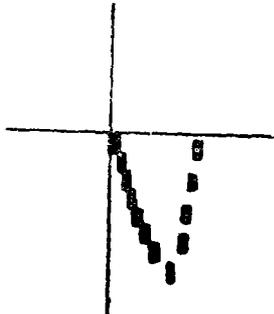
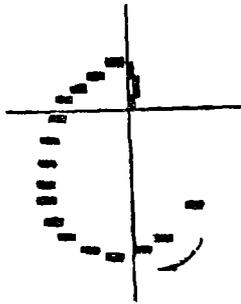
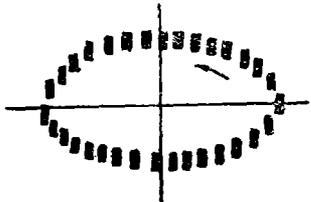
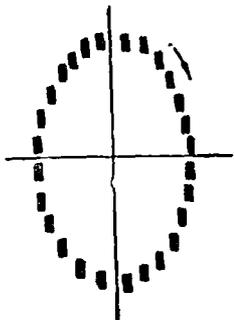
30  A=R/(2*L):W=1/SQR(L*C):W1=SQR(ABS(A*A-W*W))
40  IF A=0 THEN 60
50  IF A>W THEN 110 ELSE 160
60  PRINT "2 IMAGINARY ROOTS":PRINT "S1=","J",W1,
    "S2=","-","J" W1
70  STOP:GOSUB 210
80  FOR T=0 TO 10 STEP 0.2
90  I=IO*cos(W*T)-UO*W*C*SIN(W*T):
    I=KI*I:I=INT(5/2*I)
100 U=UO*cos(W*T)+IO/(W*C)*SIN(W*T):U=KU*U
    :U=INT(0.5+U):GOTO 250
110 PRINT "2 REAL ROOTS":
    S1=-A+SQR(A*A-W*W):S2=-A-SQR(A*A-W*W):PRINT
    "S1=","S1","S2=","S2
20  STOP:GOSUB 210
30  FOR T=0 TO 15 STEP 0.1
140 I=IO/(S1-S2)*(S1*EXP(S1*T)-S2*EXP(S2*T))+C*UO*S1
    *S2/(S1-S2)*(EXP(S2*T)-EXP(S1*T)):I=KI*I:I=INT
    (5/2*I)
150 U=IO/((S1-S2)*C)*(EXP(S1*T)-EXP(S2*T))+UO/(S1-S2)
    *(S1*EXP(S2*T)-S2*EXP(S1*T)):U=KU*U:U=INT(0.5+
    U):GOTO 250
160 PRINT "2 CONJUGATE COMPLEX ROOTS":PRINT "S1="
    -A,"+", "J",W1,"S2=",-A,"-", "J",W1
170 STOP..GOSUB 210
180 FOR T=0 TO 10 STEP 0.2
190 I=IO*EXP(-A*T)*(cos(W1*T)-A/W1*SIN(W1*T))-C*W
    *W/W1*UO*EXP(-A*T)*SIN(W1*T):I=KI*I:I=INT(5/2
    *I)
200 U=IO/(W1*C)*EXP(-A*T)*SIN(W1*T)+UO*EXP(-A*T)
    *(cos(W1*T)+A/W1*SIN(W1*T)):U=KU*U:U=INT(0.5+U)
    :GOTO 250
210 CLS
220 FOR X=20 TO 110:SET(X,25):NEXT X
230 FOR Y=5 TO 45:SET(60,Y):NEXT Y
240 RETURN
250 SET(I+60,25-U):NEXT T

```

260 GOTO 10

270 END

3.3 不同参数下的空间轨道曲线

RLC 串 联 电 路	RLC 並 联 电 路
<p>? 2,1,3,0.5,0.25,8,8 2 REAL ROOTS S1 = -2 S2 = -4</p>	<p>? 1,1,.33,4,.083,8,8 2 REAL ROOTS S1 = -1.01846 S2 = -2.95744</p>
	
<p>图 2 过阻尼的轨道形状 uc(0) = 2伏, iL(0) = 1安, R = 3 欧 L = .5亨 C = .25法 KI = Ku = 8</p>	<p>图 6 过阻尼的轨道曲线 uc(0) = 1v iL(0) = 1A R = 3Ω, L = 4H C = $\frac{1}{12}$ F, KI = Ku = 8</p>
<p>? 1,1,1,1,1,15,15 2 CONJUGATE COMPLEX ROOTS S1 = -.5 + J.8866026 S2 = -.5 - J.8866026</p>	<p>? 1,1,1,1,1,15,15 2 CONJUGATE COMPLEX ROOTS S1 = -.5 + J.866026 S2 = -.5 - J.866026</p>
	
<p>图 3 欠阻尼的轨道形状 uc(0) = 1v, iL(0) = 1A, R = 1Ω, L = 1H C = 1F KI = Ku = 15</p>	<p>图 7 欠阻尼的轨道形状 uc(0) = 1v iL(0) = 1A R = 1Ω, L = 1H C = 1F KI = Ku = 15</p>
<p>? 10,1,0,1,2,1,1 2 IMAGINARY ROOTS S1 = J.707107 S2 = -J.707107</p>	<p>? 1,1,0,4,1,8,8 2 IMAGINARY ROOTS S1 = J.5 S2 = -J.5</p>
	
<p>图 4 无损耗的轨道形状 uc(0) = 10v iL(0) = 1A R = 0Ω, L = 1H C = 2F KI = Ku = 1</p>	<p>图 8 无损耗的轨道形状 uc(0) = 1v iL(0) = 1A R = 0Ω, L = 4H C = 1F KI = KU = 8</p>

3.4, 程序说明

计算机执行以上程序后, 显示出:

$$\begin{array}{llll} UO = & IO = & R = & L = \\ C = & KI = & KU = & \\ ? & & & \end{array}$$

这是计算机执行10, 20语句后要求我们输入的电路参数, 此后便可以从键盘上输入电容器的初始电压 UO (即方程③、④、⑤的 $u_c(o)$), 电感器的初始电流 IO (方程中的 $i_L(o)$), 电路参数, 电阻 R 、电感 L 、电容 C , 电流电压的比例系数 KI 、 Ku (使图形放大或缩小)。

数据输入后, 由30语句算出 A 和 W 的值。条件语句40判定 A 是否为零。50语句判定 A 与 W 的关系。因为电路的零输入响应的形式取决于 A 与 W 的相对大小, 依其相对关系使电路分为无损耗、过阻尼和欠阻尼三种状态。

如 $A = 0$ (即电路的电阻为零), 则计算机跳过50语句, 执行60语句, 显示出: “二个虚根”及 $S_1 = JW_1$, $S_2 = -JW_2$ 的值。

继而执行80、90、100、250语句显示出状态轨道是以原点为中心的椭圆形。说明电路是不稳定的。曲线如图4

当 $A \neq 0$ 时, 计算机跳过40语句执行50语句, 再判 A 与 W 的关系, 如 $A > W$ 则把控制转到110语句, 并显示“二个实根”及其具体数值。执行130、140、150、250语句后显示状态空间轨道如图2。说明此时电路为过阻尼。

如执行50语句时判定的结果是 $A < W$, 则计算机就直接跳到160语句, 并显示 $S_1 = -A + JW_1$, $S_2 = -A - JW_1$ 。由180、190、200、250语句显示的状态空间轨道是终止于原点的螺旋线, 说明电路是欠阻尼振荡。如图3曲线所示。

计算机每显示一条状态曲线以后, 屏幕上就重新询问七个参数的数值是什么? 此后只要再输入不同的初始条件及电路参数就立即显示其对应的状态空间轨道的形状。

四、结束语

以上仅介绍了RLC串联电路零输入响应的空间轨道形状, 对于RLC并联电路同样也可以类似的方法编程输入计算机, 本文不多赘述。这里仅给出其电路图, 如图9及描述该电路的微分方程:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0$$

$$\text{其特征根: } S_{1,2} = -A \pm \sqrt{A^2 - W^2}$$

$$\text{式中: } A = \frac{G}{2C}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$G = \frac{1}{R} \text{--- 电路电导。}$$

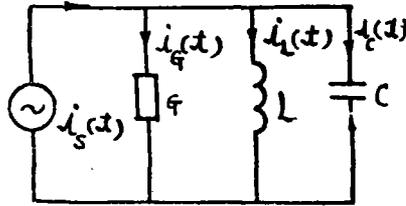


图9 RLC 并联电路

在不同电路参数下, RLC并联电路的状态空间轨道曲线如图6, 7, 8所示。

从以上各曲线可见, 由计算机所显示的曲线形状不但可以判定在不同参数下电路响应的特性及其稳定性, 而且还可辨别电路是串联的或是并联的, 串联电路的轨道走向是逆时针方向, 而并联电路则是顺时针向。

籍助于计算机辅助设计显示的图象来研究电路网络的特性是极其方便的, 且异常迅速、直观、准确。随着电子计算机应用的普及和电路分析理论的迅猛发展, 把计算机辅助设计引入到电路的分析中是一个势在必然的趋势。本文涉及的内容仅是这方面工作的一个侧面, 至于其他方面的内容, 如拓扑有向图的计算机分析本文均无涉及。因水平有限, 文中所述内容如有不妥, 望读者多加指教。

五、参 考 文 献

- [1] C. A 狄苏尔 葛守仁 “电路基本理论”上册 林争辉译《人民教育出版社》1979
- [2] OMAR. WING “CIRCUIT THEORY” 《MC GRAW—HILL》1978
- [3] 李瀚莎 “电路分析基础”上册 《人民教育出版社》1978
- [4] TRS—80 LEVEL—II BASIC 算法语言 《本校自编讲义》1980

*: 文中的程序是在我校 TRS—80 微型机上调试的。