矩形截面弯曲管道中的二次流

化学工程系　　翁荣周

提　　要

本文研究矩形截面微小弯曲管道中的二次流，导出了二次流基本方程式并得到了数值解。

一、前　　言

在自然界和工程技术中，流体流过弯曲管道的现象是普遍存在的，在很多场合，也经常遇到矩形管道的情况，如螺旋板换热器。因此深入的研究矩形弯曲管的流动问题是很有意义的。

然而流体流过转弯处时，在管的中心部份速度较高，由于离心力的作用而被迫向外，在靠近管壁处，离心力较小，流体便沿着壁面向内侧运动，从而在管的横截面上产生二次流，这种二次流通常称为第一类二次流[1]。由于二次流的存在使弯曲管的流动变成了三维流体力学问题，大大增加了它的复杂性。所以对弯曲管道问题前人虽作过一些工作，但还很不够，特别在理论方面的研究更为欠缺。

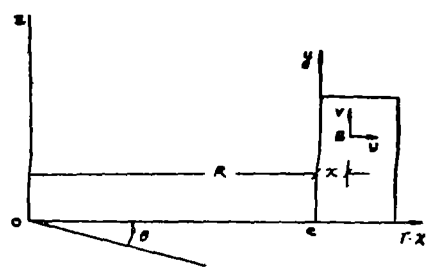
1927年 W. R. Dean[2] 研究了流体在矩形曲管中作层流流动时的流动特性，绘出了流线，并指出流体在弯管中的流动特性是与 $Re^2\frac{d}{R}$ 有关，1965年和1970年 Y. Mori等人[3]、[4] 研究了大Dean数下圆形曲管和矩形截面弯管强制对流换热问题，把曲管中的流动分为边界层区域和核心区域两部份，并从理论上分析指出，由于二次流的影响，轴向最大速度移到外侧壁面处。

本文将文献〔2〕推广到矩形弯管，研究矩形截面微小弯曲管道的二次流问题，以便为深入的探讨该问题和分析曲管型换热器提供一定的理论基础。

二、二次流基本方程的导出

考虑不可压缩流体在矩形截面微小弯曲管道中的等温层流运动，为便于分析，采用如图1所示的坐标系（r、ϑ、z），曲管绕oz轴旋转，oz轴所截的曲管的横截面是一个矩形，过此矩形的内侧边作垂直于旋转轴oz的垂线，其长为R，它是曲管内侧壁绕旋转轴oz的曲率半径，如果在ϑ

图 1



处以矩形截面的底和内侧边的交点e作原点，且沿着它们分别作x轴和y轴，那么流场中任意一点B（r、ϑ、z）可用B（x、ϑ、y）表示，这两个坐标系之间的关系如下：

$r = R + x,\ \vartheta = \vartheta,\ z = y$

另外，如果我们用U、V、W分别表示B点x、y、ϑ方向的分速，同时注意到充分发展稳定流动的情况，那么圆柱坐标下的Navier—stokes方程和连续性方程[5]经简单的代数运算和微分运算可以得如下形式：

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{W^2}{R+x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R+x}\right)U+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R+x}\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] \qquad (16)$$

$$U\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R+x}\right)W\right]+V\frac{\partial W}{\partial y}=-\frac{1}{\rho(R+x)}\frac{\partial P}{\partial \vartheta}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R+x}\right)W+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] \qquad (IC)$$

和 $$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R+x}\right)U+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

方程(1)、(2)为非线性方程组，其解甚为困难。

本文研究流体在微小弯曲管道中的流动问题，此时弯管横截面的几何尺寸d《R，d为矩形截面边长，在这种情况下，方程组(1)、(2)可作如下处理：

我们知道，对于直管$R\longrightarrow\infty$，$\frac{d}{R}\longrightarrow 0$，这时不产生第一类二次流，即

$U = V = 0$

$W = w_s$

w_s为直管中的轴向速度，至于压力P，它仅随管轴方向发生变化，即$P = cz$，这里c为常数，z是矩形截面中心点沿ϑ轴从起始坐标面到所考虑坐标面之间的长度。

对于曲管，离心力引起二次流，在$\frac{d}{R}$甚小的情况下，这种二次流也很小，可以认为它和$\frac{d}{R}$是同一数量级的，因此，假设：

$$\left.\begin{aligned}U&=u\\V&=v\\W&=w_s+w\\P&=cz+p\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

这里u、v、和w分别是曲管中流体在x、y、和ϑ轴的附加速度分量，p是附加压力，它们均是与$\frac{d}{R}$同级的量，将(3)代入(1)、(2)并注意$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R+x}\right)$用$\frac{\partial}{\partial x}$代替，$R+x$用R代替，$\frac{\partial}{R\partial\vartheta}$用$\frac{\partial}{\partial z}$代替以后，在运算中忽略$\left(\frac{d}{R}\right)^2$之高级微量，便得到：

$$-\frac{w_s^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (4a)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (4b)$$

$$u\frac{\partial w_s}{\partial x} + v\frac{\partial w_s}{\partial y} = -\left(\frac{c}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (4c')$$

和 $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

但我们知道当$R \longrightarrow \infty$时，$u = v = w = p = 0$，故由（4c′）得流体在矩形截面直管中的运动方程：

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = -\frac{c}{\mu} \qquad (6)$$

这里 $\mu = \rho\nu$ 为动力粘性系数。式（6）与直接从直管中导出來的是一样的。现在我们来导出二次流基本方程式。

为此从(4a)和(4b)中消去压力p得到：

$$\rho\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) = 2\frac{w_s}{R}\frac{\partial w_s}{\partial y} \qquad (7)$$

从方程（5）知存在函数 φ，令：

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

（5）式自动满足，将它代（7）式就得二次流应满足的方程：

$$\nabla^4\varphi = 2\frac{w_s}{\nu R}\frac{\partial w_s}{\partial y} \qquad (9)$$

式中 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

这是关于φ 的重调和泊松方程，这种方程在弹性力学中经常遇到。

三、二次流方程的数值求解

以边长为 d 的正方形截面为例进行求解。先求直管轴向分速w_s，此时只需解满足齐次狄里赫莱条件下的泊松方程（6），其解为：

$$w_s = \frac{16\Delta p d^2}{\pi^4 \mu l}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\ \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin m\pi\frac{x}{d}\sin n\pi\frac{y}{d}}{mn(m^2+n^2)} \qquad (10a)$$

$m = 1、3、5\cdots,\ n = 1、3、5\cdots$

将(10a)代入(9)得：

$$\nabla^4\varphi=\frac{512\,d^3}{\pi^7\,\mu^2Rv}\left(\frac{\triangle p}{l}\right)^2\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin m\pi\frac{x}{d}\sin n\pi\frac{y}{d}}{m(m^2+n^2)}\times$$

$$\times\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin m\pi\frac{x}{d}\cos n\pi\frac{y}{d}}{mn(m^2+n^2)}\tag{11}$$

为了便于研究，我们将方程(11)化为无因次形式，为此令：

$$\left.\begin{aligned}\Psi&=\frac{\varphi}{v}\\X&=\frac{x}{d}\\Y&=\frac{y}{d}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

将(12)代入(11)式，得到：

$$\nabla^4\Psi=68.4149\,K\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin m\pi X\mathrm{con}\,n\pi Y}{m(m^2+n^2)}$$

$$\times\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\mathrm{simm}\pi X\sin n\pi Y}{mn(m^2+n^2)}\tag{13}$$

边界条件是：

$$\left.\begin{aligned}&X=0,\ X=1;\ \Psi=0,\ \frac{\partial\Psi}{\partial X}=0\\&Y=0,\ Y=1;\ \Psi=0,\ \frac{\partial\Psi}{\partial Y}=0\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

式中K为Dean数，

$$K=2\,Re^2\frac{d}{R}$$

其中　$Re=\frac{w_m d}{v}$

w_m为直管轴向横截面平均分速。

为了在计算机上进行数值解，将其化为差分方程，取步长 $h=\frac{1}{10}$，则对应矩形域内点 (i, j)（i, j = 2 – 8）可列出差分逼近式[6]：

$$\Psi(i,j)=\frac{1}{20}\Big(10^{-4}f(i,j)+8\big(\Psi(i+1,j)+\Psi(i-1,j)+\Psi(i,j-1)+\Psi(i,j+1)\big)$$
$$-2\big(\Psi(i+1,j+1)+\Psi(i-1,j+1)+\Psi(i-1,j-1)+\Psi(i+1,j-1)\big)-\big(\Psi(i+2,j)$$
$$+\Psi(i-2,j)+\Psi(i,j+2)+\Psi(i,j-2)\big)\Big)\tag{15}$$

式中

$$f(i,j)=68.4149\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots,}^{\infty}\frac{\sin m\pi\frac{j}{10}\cos n\pi\frac{i}{10}}{m(m^2+n^2)}$$

$$\times\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots,}^{\infty}\frac{\sin m\pi\frac{j}{10}\ \sin n\pi\frac{i}{10}}{mn(m^2+n^2)} \qquad (15a)$$

据(14)边界上的值有：

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi(0,j)=0,\ \Psi(10,j)=0,\ j=0-10\\
&\Psi(i,0)=0,\ \Psi(i,10)=0,\ i=0-10\\
&\Psi(1,j)=0,\ \Psi(9,j)=0,\ j=1-9\\
&\Psi(i,1)=0,\ \Psi(i,9)=0,\ i=1-9
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

差分方程(15)在边界带值条件下，当给出一定精度要求后可在计算机上求解，本文在我校计算站经TRS—80计算机计算得到Ψ(i,j)内点的值，整个区域上其Ψ的值如表1所示。

表1　　Ψ(i,j)10^5*

j＼i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	16.943	34.602	46.832	51.161	46.832	34.602	16.943	0	0
3	0	0	24.719	50.965	69.316	75.825	69.316	50.965	24.719	0	0
4	0	0	17.610	36.373	49.547	54.233	49.547	36.373	17.610	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	17.610	36.373	49.547	54.233	49.547	36.373	17.610	0	0
7	0	0	24.719	50.965	69.316	75.825	69.316	50.965	24.719	0	0
8	0	0	16.943	34.602	46.832	51.161	46.832	34.602	16.943	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

*　表1所列的值，根据方程(13)、(14)的性质，略作调整

当求出Ψ的值后，可以求出无因次二次流速度U、V的值，令：

$$\left.\begin{aligned}
U&=\frac{u}{w_m}\\
V&=\frac{v}{w_m}
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

将(8)、(12)代入上式得：

$$
\left.\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{Re}\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\\
V &= \frac{1}{Re}\frac{\partial\Psi}{\partial X}
\end{aligned}\right\} \quad (18)
$$

按Ψ的近似值画出来的流线如图2所示，它是流体微元轨迹线在曲管横截面上的投影，

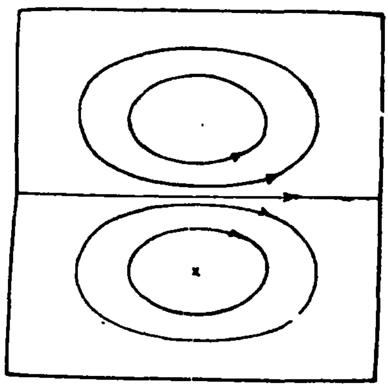


图　2

从图2可以看出，流体的运动是从横截面的中心部份的内侧壁流向外侧壁，然后分成对称的两部份沿着壁面折向内侧，此种流动图案是和物理概念相符的。

四、结　论

由前面的讨论，我们可以得出如下结论：(1)，流体在矩形截面弯曲管道中作层流流动时，由于离心力的作用，将在横截面上产生二次流，而且二次流的速度U、V是和Dean数有关，Dean数是说明曲管流动特性的准则(2)，由于二次流和主流叠加的结果，致使曲管中的流线不再平行于管轴心线，而是由两族互相对称的螺旋曲线组成，它们在横截面上的投影如图2所示。

参考文献

〔1〕L，普朗特，体流力学概论，郭永怀等译，科学出版社，1972年
〔2〕W. R. Dean. Phil. Mag(7). Vol. 4, p208(1927)；
Vol. 5, p673(1928)
〔3〕Y. Mori等，Int. Joun. Heat and Mass Transfer. Vol. 8. Nol
1965. 1
〔4〕Y. Mori等，Iut. Jour. Heat and Mass Transfer. Vol. 14p 1787(1971)
〔5〕Л.Д.朗道，连续介质力学。第一册　彭旭麟译，人民教育出版、1962年
〔6〕武汉大学，山东大学，计算方法　人民教育出版社，1979年