

序 率 滤 波

华侨大学物理系 杨德兴

提 要

本文描述了一种新颖的滤波方法——序率滤波的理论基础和实现原理。讨论了低通、带通序率滤波的数学模型和方框图、分析了一种能导致简单滤波矩阵，广义Weiner滤波。

一 前 言

在现代电子技术领域中滤波技术占据着重要的地位。波谱分析、信息处理、数据传输等都离不开滤波技术。滤波技术的发展正是为了满足各方面的需要。它经历了从无源到有源、从集中参数到分布参数、以及从连续时间系统到离散时间系统的发展过程。电子数字计算机和大规模集成电路的出现和完善，促使滤波技术也焕然一新。

本文所述的序率滤波是建立在Walsh函数的理论上的。Walsh函数被提出来至今已有七、八十年了，但一直得不到恰当的用场，直到现在，逻辑电路的出现才为Walsh函数的应用打开了大门。Walsh函数仅取+1和-1对应着逻辑电路的二值性。可以说Walsh函数提供的滤波模式是借助于逻辑电路来实现的。而Fourier理论提供的滤波模式一般是用电感电容来实现的。当然，Fourier分析的滤波理论本身也在发展着，但不能不说在某些方面也存在着问题，而这些问题应用序率滤波都能很好地解决。序率滤波具有一系列优点，例如计算量少，简构简化，可靠等等，因而引起了许多人的兴趣，吸引他们去进行更深入的研究。

二 序率滤波的数学基础

2.1 Walsh函数和Walsh变换

关于Walsh函数，内容涉及面很广，已有许多专著〔1〕，〔2〕。此处仅就本文涉及的内容作一简述。

$\{\text{Wal}(n, \theta)\}$ 是正交归一完备函数族。Walsh函数有各种不同的定义方式，它们本质相同，只是排列次序不同，相互间可以转换。其中以序数排列的定义为：

$$\text{Wal}(n, \theta) = \prod_{k=0}^{P-1} \text{Sgn}[\text{Cos}_{nk} 2^k \pi \theta] \quad \langle 1 \rangle$$

$n = 0, 1, 2 \dots$ $P-1$ 为 n 的二进表达式中的最高位数

n_k 是 n 的二进表达式中的第 k 位数字 $n_k \in \{0, 1\}$ 最右边为第 0 位，向左依次为第 1, 2 ... $P-1$ 位

θ 是归一化时间变量。对于时间 t , 选择合适的时基 T , 令 $\theta = \frac{t}{T}$ 。

$$\text{sgn} \text{ 是符号函数, } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

拓广到整个连续 μ 轴规定

$$\text{Wal}(\mu, \theta) = \text{Wal}(n, \theta) \quad n \leq \mu \leq n+1 \quad n \text{ 为井数} \quad \langle 2 \rangle$$

μ 为连续变量

Walsh 函数有乘法公式:

$$\text{Wal}(n, \theta) \text{Wal}(k, \theta) = \text{Wal}(n \oplus k, \theta) \quad \langle 3 \rangle$$

\oplus 为“模 2 和”符号。

任何定义于 $(0, 1)$ 上的 Lebejsque 可积函数 $f(\theta)$ 都可展为 Walsh 级数。从而可定义一组 Walsh 变换为

$$F(k) = \int_0^1 f(\theta) \text{Wal}(k, \theta) d\theta \quad \langle 4 \rangle$$

$$f(\theta) = \sum_{K=0}^{\infty} F(k) \text{Wal}(k, \theta) \quad \langle 5 \rangle$$

$F(k)$ 称为 Walsh 系数。

把 $[0, 1)$ 均分为 $N = 2^P$ 个子区间 (P 为正整数), 分点为 $0, 1, \dots, N-1$, 子区长度为 $\Delta = \frac{1}{N}$, $\text{Wal}(h, \theta)$, $h = 0, 2 \dots N-1$, 对每一个 h 值的 $\text{Wal}(h, \theta)$, 在各子区都有确定的取样值, 这些取样值组成一个 N 维行向量, 按照序率顺序把首 N 个行向量组成 N 阶矩阵, 称之为 Walsh 矩阵, 记为 Wal_N 。例如 4 阶和 8 阶 Walsh 矩阵为

$$\text{Wal}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \langle 6 \rangle \quad \text{Wal}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \langle 7 \rangle$$

把 $[0, 1)$ 上的连续信号按时间间隔 $\Delta = \frac{1}{N}$ 进行取样, 得到离散信号序列 $[f(0), f(1) \dots f(N-1)]$ 。

定义离散 Walsh 变换和反变换为

$$\text{正变换} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \text{Wal}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} \quad \langle 8 \rangle$$

$$\text{反变换} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Wal}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} \quad \langle 9 \rangle$$

2.2、一般滤波方法和数学表达

设信号为 $X(t) = S(t) + n(t)$ (10)

其中 $s(t)$ 是有效信号, $n(t)$ 是干扰信号。一般而言, 二者的频谱 $S(f)$ 和 $N(f)$ 是有差异的。滤波的实质是设计一个滤波因子 $H(f)$, 使 $S(f)$ 加强而 $N(f)$ 削弱, 输出信号的频谱为

$$Y(f) = H(f) X(f) \quad (11)$$

当 $S(f)$ 和 $N(f)$ 是互相分离的时候, $H(f)$ 就特别简单, 只要设计 $H(f) = \begin{cases} 1 & S(f) \neq 0 \\ 0 & S(f) = 0 \end{cases}$, 于是输出信号频谱为

$$Y(f) = H(f) X(f) = H(f) [S(f) + N(f)] = S(f) \quad (12)$$

即完全滤除了 $N(f)$, 这是理想滤波的情况。

实际情况不这样简单, 我们只能要求滤波输出中 $S(N)$ 分量尽量多, 而 $N(f)$ 分量尽量少, 即使得误差 $\|Y(f) - S(f)\|$ 为最小。

三 模拟序率滤波

式(11)描述的是基于 Fourier 分析理论的频域滤波, 也可以推广到序率滤波。Wal(n, θ) 中的 n 反映着函数在 $[0, 1)$ 过 o 点的次数, n 为偶数时, Wal(n, θ) 在 $[0, 1)$ 有 n 次变号, n 为奇数时则有 $n+1$ 次。考虑到三角函数中频率 f 即是函数在单位时间 $[0, 1)$ 过 o 点次数的一半,

类似地定义序率为 $i = \begin{cases} n/2 & n \text{ 为偶数} \\ n+1/2 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 这样 n 就和序率连系起来了。序率和频率的差别在于频率概念中相邻二个 o 点的距离固定, 而序率概念中相邻二个 o 点的距离不固定。

据(5) $f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \text{wal}(k, \theta)$, 若在叠加求和之前对系数 $F(k)$ 进行调变, 即设计一个滤波因子 $H^T(k)$, 使其和 $F(k)$ 相乘后某些 $F(k)$ 加强了而某些 $F(k)$ 削弱了, 则输出信号就是

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) H^T(k) \text{Wal}(k, \theta) \quad (13)$$

$$\text{若 } H^T(k) = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k \geq n \end{cases} \quad (14) \quad \text{则低于 } n \text{ 的分量都能得到, 高于 } n$$

(包括 n) 的分量都滤除了。这是低通序率滤波的原理。但这个式子也有问题, 它只是表示瞬时滤波的理想情况。实际滤波器都有一定的延迟时间, 并且对每个序率分量的延迟可能参差不齐, 叠加时将会相互错开, 应采取措施来保证滤波后各分量的叠加是同时进行的。因此在叠加之前, 每个分量都应暂时保存起来, 直到某一合适时到刻 θ' 时才一齐取出来叠加, 这个任务是由“采样——保持器”来完成的而“取出时刻” θ' 可用“时间控制单元”来制定。于是实际低通滤波输出为

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) H^T(k) \text{Wal}(k, \theta - \theta') \quad (15)$$

让我们来具体分析一种最简单情况。

$$\text{设 } H^T(k) = \begin{cases} 1 & k < 1 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases} \quad \theta' = 1 \quad \langle 16 \rangle$$

此滤波器能滤除 $k \geq 1$ 的分量, 仅通过 $0 \leq k < 1$ 的分量, 输出为

$$g(\theta) = F(o) \text{Wal}(o, \theta-1) \quad \langle 17 \rangle$$

$$F(o) = \int_0^1 f(\theta) d\theta \quad \langle 18 \rangle$$

选取合适的时基 T , 令 $\theta = t/T$, 把 t 归一化意味着 t 轴用 T 来分段。在每一段即 θ 为 $[0, 1)$, $[1, 2)$..., 对 $f(\theta)$ 进行积分, 取末时刻的积分值做为每一周期的系数 $F(o)$, 保存在“采样——保持器”里, 这样在整个 θ 轴上形成一个阶梯信号, 它就是 $f(\theta)$ 滤除了高序率分量后的滤波信号, 为了恢复成连续值可再加一个平滑处理机构。具体电路可这样来实现,

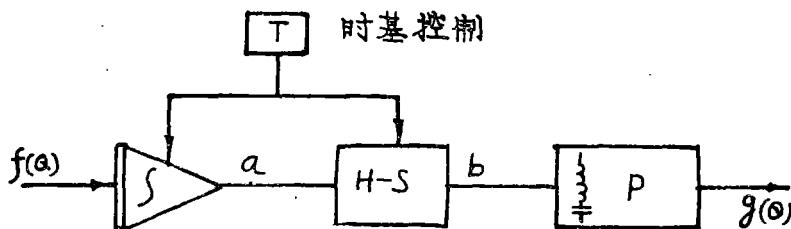


图 1、最简单低通序率滤波器

S-积分器, H-S-采样保持器 P-平滑处理器 T-时基控制单元

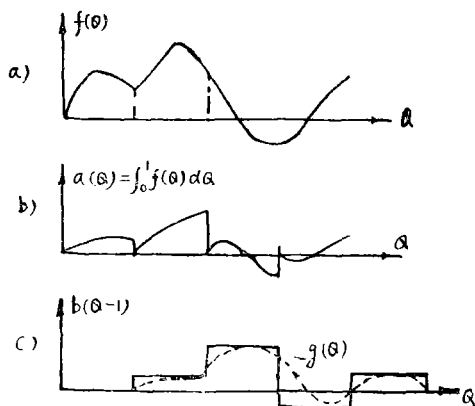


图 2、图中各点对原波形

具体步骤为

1、选取合适时基 T

2、时基脉冲进入时 H-S 采样并保持下来, 脉冲结束时积分器消除为 0。并开始下一个周期的积分。

3、采样保持器在时基脉冲控制下输出所采样的信号, 它正好是前一个周期的积分值,

延迟为 1。

对于 $n > 0$ 的低通滤波

$$H^T(k) = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k \geq n \end{cases} \quad n > 0 \quad (19)$$

原理大致相同，以 $n = 2$ 为例说明

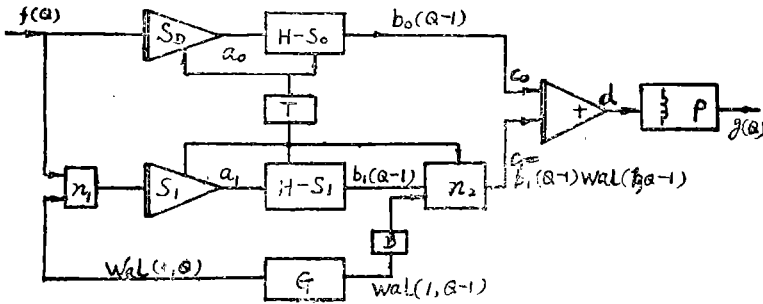


图 3、 $n = 2$ 的低通序率滤波器

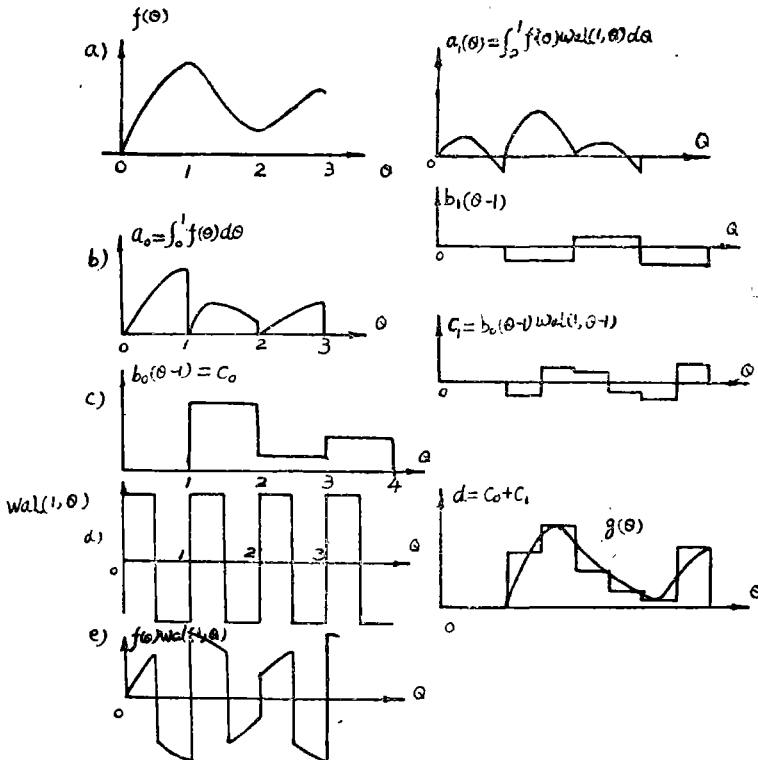


图 4、图 3 的各点波形分析

$g(\theta)$ 为平滑处理后的输出

3.2、序率带通滤波器

利用 Walsh 函数的乘法公式可以很方便地构成带通滤波器

设为通过 $[n, n+1)$ 的滤带, 把 $Wal(n, \theta)$ 和 $f(\theta)$ 相乘得

$$\begin{aligned} f(\theta) Wal(n, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} F(k) Wal(k, \theta) Wal(n, \theta) \\ &= F(n) Wal(n \oplus n, \theta) + \sum_{k \neq n} F(k) Wal(k \oplus n, \theta) \\ &= F(n) Wal(0, \theta) + \sum_{k \neq n} F(k) Wal(k \oplus n, \theta) \end{aligned} \quad (20)$$

式中用了“模二和”性质 $\begin{cases} n \oplus n = 0 \\ k \oplus n \neq 0 & k \neq n \end{cases}$

让相乘结果通过图 1 所示的最简单低通滤波器, 它只让 $n=0$ 的分量通过, 输出 $F(n) Wal(0, \theta-1)$, 再把此输出和 $Wal(n, \theta-1)$ 相乘得最后输出为

$$F(n) Wal(0, \theta-1) Wal(n, \theta-1) = F(n) Wal(n, \theta-1)$$

即滤波器只通过了 $n \sim n+1$ 间的分量, 序带宽度为 $(n+1) - n = 1$ 。用以实现的方框图如图 5

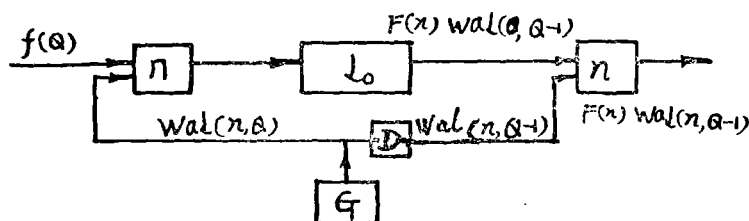


图 5、带通序率滤波器

要扩大滤带宽度可用类似办法再并联一个或若干类似支路

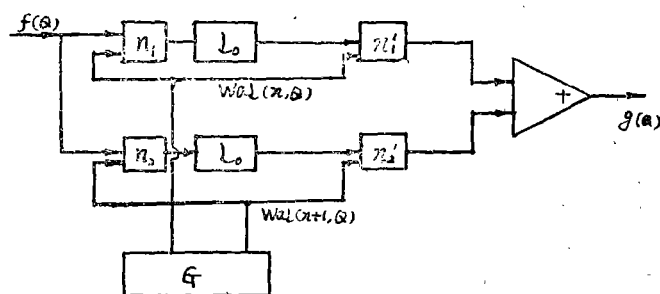


图 6、可通过 $n \sim n+2$ 的带通序率滤波器

四 广义 Wiener 滤波

信号数据处理中把连续信号进行离散化得到一组 n 维数据向量 $X' = [X(0), X(1), \dots, X(n-1)]$, 它是有效信号数据向量 $S' = [S(0), S(1) \dots S(n-1)]$ 和干扰信号数据向量 $N' = [N(0), N(1) \dots N(n-1)]$ 的和。广义 Wiener 滤波目的在于选择一组正交变换和滤波矩阵使得干扰信号数据向量 N' 大大削弱, 其模型如图 7。

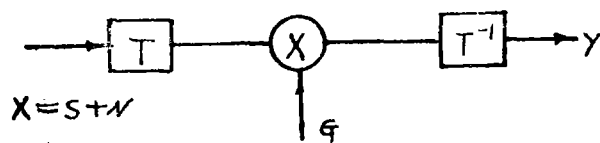


图 7、广义 Wiener 滤波模型

T, T^{-1} 是所选择的正交变换和反变换矩阵 G 是所设计的滤波矩阵。

据此模型, 滤波输出为 $Y = T^{-1}GT X$ (21)

$$X = S + N \quad (22)$$

定义随机数据向量 F 的协方差矩阵 A_F 为

$$A_F = E\{(F - \bar{F})(F - \bar{F})'\} \quad (23) \quad E \text{ 为期望值算子, } \bar{F} \text{ 为平均值}$$

$$\text{据此 } A_X = E\{(Z - \bar{Z})(Z - \bar{Z})'\} \quad (24)$$

$$A_S = E\{(S - \bar{S})(S - \bar{S})'\} \quad (25)$$

$$A_N = E\{(N - \bar{N})(N - \bar{N})'\} \quad (26)$$

$$\text{定义误差向量为 } B = Y - S \quad (27)$$

$$\text{总均方差为 } \epsilon = E\{\|Y - S\|^2\} \quad (28) \quad \| \quad \| \text{ 表范数}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= E\{\|Y - S\|^2\} = E\left\{\left(y(0) - S(0)\right)^2 + \dots + \left(y(N-1) - S(N-1)\right)^2\right\} \\ &= E\left\{\left[\begin{pmatrix} y(0) - S(0) & \dots & y(N-1) - S(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) - S(0) \\ \vdots \\ y(N-1) - S(N-1) \end{pmatrix}\right]\right\} \\ &= E\left\{(Y - S)'(Y - S)\right\} \\ &= E\left\{(T^{-1}GT X - S)'(T^{-1}GT X - S)\right\} \end{aligned}$$

要使 G 为最佳滤波矩阵,即使 ε 最小,应令 ε 对矩阵 G 的梯度为0即 $\nabla_G \varepsilon = 0$ <29>

由此求出最佳滤波矩阵 $G_k = T A_S (A_S + A_N)^{-1} T^{-1}$ <30>

$$\varepsilon_{\min} = \text{tr} \left\{ A_S - A_S (A_S + A_N)^{-1} A_S \right\} \quad \text{<31>} \quad \text{tr} \text{---表示矩阵迹}$$

由式<31>知 ε_{\min} 和所选择的正交变换 T 无关。为使运算次数减少,应选择一种合适的正交变换。选用 Walsh正交变换即可达此目的。其乘法次数约为 N^2 ,而其他变换大都比它多,例如离散Fourier变换大约需运算 $N^2 + 2N \log_2 N$ 次。

若所选择的正交矩阵 T 恰是响应矩阵 $A_R = A_S (A_S + A_N)^{-1}$ 的本征矩阵,则 $G_k = T A_R T^{-1}$ 将是一个对角线性矩阵,其对角元素是 A_R 的本征值,于是运算又可大大简化,只在对角元素处进行运算。遗憾的是实际问题很难导致对角矩阵,一种可行办法是牺牲一定的误差精度而限定 G 为对角矩阵,这就是次最佳滤波的设想。在序率滤波中,这个对角矩阵的对角元素可取1或0,要保留的滤率置1,不要向置0,成为。

$$G = \begin{pmatrix} G_{00} & & & & \\ & G_{11} & & 0 & \\ & & \vdots & & \\ & 0 & & & G_{n-1}, G_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{<32>} \quad G_{ii} \in \{0, 1\}$$

$$\text{滤波输出为 } \lambda = W^{-1} G W Z \quad \text{<33>}$$

因为Walsh矩阵元都是+1或-1,使得 $W^{-1} G W$ 矩阵只含+1,-1,0,运算全是加减运算,且运算次数极少,虽然损失了一定精度,却换来了设备的大大简化。

下面分析一例来说明问题。

设 $X' = (2, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 6)$

$S' = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$

$N' = (1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2)$

$$\text{令 } G = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad T = \frac{1}{8} [\text{Wal}_8]$$

于是

$$T^{-1} G T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 3 \\ 3 \\ 4.5 \\ 4.5 \\ 5.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{若令 } G = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ 则可运算得 } y_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

画出波形如下:

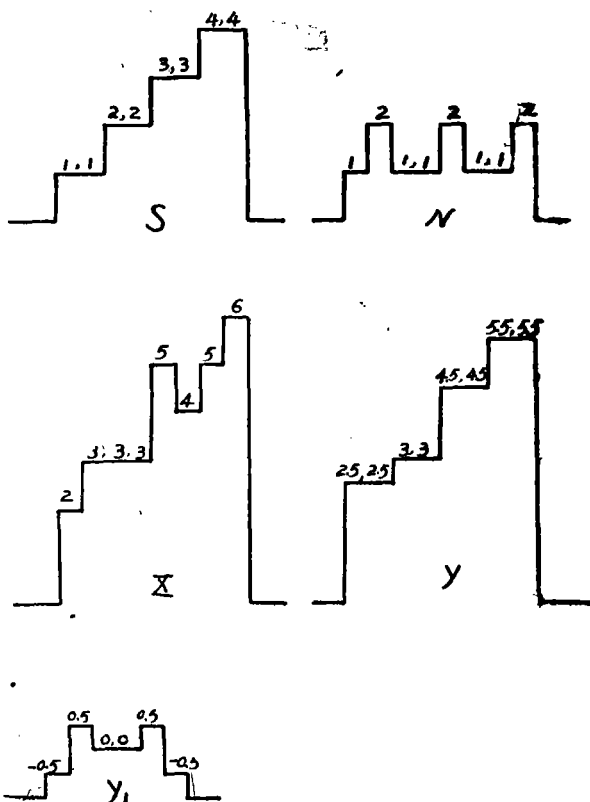


图 8
波形比较

由图可见 y 和 S 是很相似的即滤波效果很好。而 y_1 和 N 很相似, 这一方面说明所滤除的确是干扰部份, 另一方面也说明把 N 作为有效信号时滤除低序率分量的效果也是很显著的。这在数字滤波中的优点是显然的。美中不足的是误差较大, 但对于某些应用已足够,

五 结 束 语

建立在 Walsh 变换基础上的序率滤波理论是十分引人注目的。有人将这种滤波理论用于地震波数据处理, 得出十分满意的结果。它的缺点也正在逐步被解决。限于作者水平和实践, 本文对该课题的其他方面没有涉及。但可预料, 随着数字技术的普通应用, 序率滤波也将日臻完善, 并渗透到各学科中。

参 考 文 献

- [1] HARMUTH, H, F "Sequency Theory" 《Academic press》 1977
- [2] Ahmed•N and Rao, K, R "Orthoynl Transforms for Digitied Signal Processing" 《Academic Press》 1975
- [3] Beauchamp K•G "Walsh Function And Their Application" 《Academic Press》 1975
- [4] 陈玉宝《Walsh函数在波形综合中的应用》《华侨大学学报》1980第1期
- [5] 常迥《有关沃尔什函数应用的几个问题》《清华大学学报》1978第1期