排序问题计算加工时间的一种方法及其一个应用

天津师范专科学校 吴在德　　华侨大学数学系 梁学信

提　　要

本文提出一种所谓"斜列和"法来计算m台机床加工n个零件的排序问题的加工时间，並对$m=3$给出两个相邻零件加工先后次序的一个判别条件，以及最前或最后两个相邻零件排序的一个判别条件。

自Johnson[1]解决两台机床加工零件的排序问题以来，由于这一问题在生产中的重要性，引起人们的注意。〔2〕，〔3〕的作者，研究了三台以上机床加工零件的情况，文中作者用"最大可行和"来计算加工时间，並给出一种判别两个相邻零件先后次序的条件。显然，简便的计算加工时间的方法对寻求最优顺序是很重要的，这里我们提出一种所谓"斜列和"法来计算$m\times n$排序问题的加工时间，並对$m=3$给出两个相邻零件加工先后次序的一个判别条件，它简化了〔2〕中的结果，此外还对$m=3$给出了最前或最后两个相邻零件排序的一个判别条件。

§计算加工时间的斜列和法

我们考虑m台机床加工n个零件的一给定加工顺序$\omega=(J_1,J_2\cdots\cdots,J_n)$的加工时间。假定：①所有零件通过机床的顺序是一致的；②每个零件在各机床的加工时间已知；③每台机床在同一时间只能加工一个零件。

对任意个实数引入满足下列性质的和"$\dotplus$"运算：

(1)对同号实数的"$\dotplus$"为代数和。

(2)对两个相邻的异号实数，若负数在前正数在后，"$\dotplus$"为代数和；若正数在前而负数在后，"$\dotplus$"为将正数保留，负数另与后面的数再作"$\dotplus$"。

(3)按(1)，(2)的规定运算到最后，若为正数在前负数在后，则将正数保留而负数弃去，为其值。否则按(1)计算，得正数则保留，负数则弃去，为其值，若还再和其他数进行"$\dotplus$"，仍将负数保留与后面的数运算到最后。

先考虑两台机床($m=2$)加工n个零件的情况。设第一台机床M_1和第二台机床M_2的加工时间分别为$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$我们证明从M_1开始加工J_1到M_2加工完J_n的加工时间为

$$T(J_1, \cdots, J_n) = a_1 + \sum_{i=1}^{n} bi + l(J_1, \cdots, J_n)$$

其中 $l(J_1, \cdots, J_n) = (a_2 - b_1) + (a_3 - b_2) + \cdots + (a_n - b_{n-1})$ 称为加工顺序 $\omega = (J_1, \cdots, J_n)$ 的斜列和。

事实上，$T(J_1, \cdots J_n)$ 为M_2开始加工前的等待时间a_1和M_2的实际加工时间 $\sum_{i=1}^{n} bi$，以及 M_2 从加工 J_1到J_n之间的空閒时间$\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_n)$之和。下面用归纳法证明$l(J_1, \cdots, J_n) = \bar{I}_2(J_1, \cdots, J_n)$。

从而结论得证。

两个零件时共有两种情况：

（1）M_2 没有空閒时间，即$\bar{I}_2(J_1, J_2) = 0$，这时$a_2 - b_1 \leqslant 0$，因此有

$l(J_1, J_2) = \bar{I}_2(J_1, J_2)$。

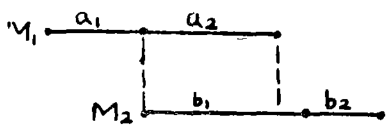

图 1

（2）M_2 有空閒时间，这时$\bar{I}_2(J_1, J_2) = a_2 - b_1$，

$\because a_2 - b_1 > 0$，

$\therefore l(J_1, J_2) = a_2 - b_1 = \bar{I}_2(J_1, J_2)$。

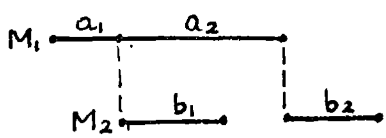

图 2

现设对加工n－1个零件结论成立，证明对加工 n 个零件结论也成立。分两种情况讨论：

（1）M_2加工完 J_{n-1} 到加工 J_n 这一段时间没有空閒，即

$$\bar{I}_2(J_1, \cdots, Jn) = \bar{I}_2(J_1, \cdots, J_{n-1}) \qquad (2.1)$$

另外，由归纳假设有

$$l(J_1, \cdots, J_{n-1}) = \bar{I}_2(J_1, \cdots, J_{n-1}) \qquad (2.2)$$

不失一般性，设M_2在加工 J_k（$2 \leqslant K \leqslant n-1$）时有空閒时间，而不再有空閒时间，于是有

$$\sum_{i=2}^{P}(a_i - b_{i-1}) \leqslant 0 \ (P = 2, \cdots, K-1)$$

$$\sum_{i=k+1}^{K}(a_i - b_{i-1}) > 0$$

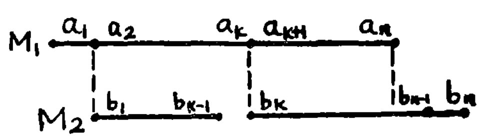

图 3

$$\sum_{i=k+1}^{K}(a_i - b_{i-1}) \leqslant 0 \ (P = K+1, \cdots; n-1)$$

及 $a_n - b_{n-1} \leqslant 0$

因此由斜列和定义得

$$\begin{aligned} l(J_1, \cdots, J_{n-1}) &= (a_2 - b_1) + \cdots + (a_k - b_{k-1}) + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-2}) \\ &= (a_2 - b_1) + \cdots + (a_k - b_{k-1}) + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-2}) + (a_n - b_{n-1}) \\ &= l(J_1, \cdots J_n)。 \qquad (2.3) \end{aligned}$$

结合（2.1）——（2.3）式便得 $I(J_1\cdots, J_n)=\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_n)$。

（2）若M_2在加工J_{n-1}到J_n时有空閑时间$\bar{I}_2(J_n)>0$，则M_2的整个空閑时间为

$\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_n)=\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_{n-1})+\bar{I}_2(J_n)$

对加工J_1到J_{n-1}的空閑时间仍做如（1）的假设，则

$$\bar{I}_2(J_n)=a_{k+1}+\cdots+a_n-(b_k+\cdots+b_{n-1})$$
$$=(a_{k+1}-b_k)+\cdots+(a_n-b_{n-1})>0 \qquad (2.4)$$

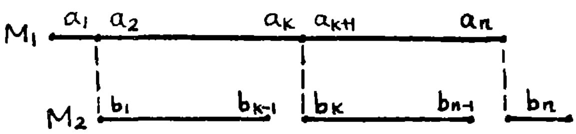

图　4

其中 $\sum_{i=k+1}^{P}(a_i-b_{i-1})\leqslant 0 \quad (P=K+1, \cdots, n-1)$

$a_n-b_{n-1}>0$

可见（2.4）式代数和为斜列和，即

$$\bar{I}_2(J_n)=(a_{k+1}-b_k)+\cdots+(a_n-b_{n-1})>0 \qquad (2.5)$$

另一方面

$$\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_{n-1})=I(J_1, \cdots, J_{n-1})$$
$$=(a_2-b_1)+\cdots+(a_k-b_{k-1})+(a_{k+1}-b_k)+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-2}) \qquad (2.6)$$

又根据假定得

$$(a_{k+1}-b_k)+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-2})=0$$

所以将（2.6）式的这些项删去仍是$\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_{n-1})$

即 $$I_2(J_1, \cdots, J_{n-1})=(a_2-b_1)+\cdots+(a_k-b_{k-1}) \qquad (2.7)$$

于是（2.7）式和（2.5）式的代数和为斜列和，且

$$I_2(J_1, \cdots, J_n)=\bar{I}_2(J_1, \cdots, J_{n-1})+\bar{I}_2(J_n)$$
$$=(a_2-b_1)+\cdots+(a_k-b_{k-1})+(a_{k+1}-b_k)+\cdots+(a_n-b_{n-1})$$
$$=I(J_1, \cdots, J_n)。$$

现讨论三台机床加工 n 个零件的情况。设机床M_1，M_2及M_3的加工时间分别为a_1, a_2，$\cdots$，a_n；b_1，b_2，$\cdots$，b_n及c_1，c_2，$\cdots$，c_n。由上面的讨论看出，求加工时间可化为两台机床加工几个零件的情况，其中第一台机床的加工时间为

$$a_1+b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{k_1-1},\ b_{k_1}+\sum_{i=2}^{k_1}(a_i-b_{i-1}),\ b_{k_1+1},\ \cdots,\ b_{k_2-1},$$

$$b_{k_2}+\sum_{i=k_1+1}^{k_2}(a_i-b_{i-1}),\ \cdots,\ b_{k_l}+\sum_{i=k_{l-1}+1}^{k_l}(a_i-b_{i-1}),\ b_{k_l+1},\ \cdots,\ b_n$$

其中 $\sum_{i=k_{j-1}+1}^{P}(a_i-b_{i-1})\leqslant 0$ ($P=k_{j-1}+1,\cdots,k_j-1,\ j=1,\cdots,l,\ 1=K_1<K_2<\cdots<K_l\leqslant n$)

$$\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}(a_i-b_{i-1})<0$$

及 $\sum_{i=k_l+1}^{P}(a_i-b_{i-1})\leqslant 0$ 　　($P=k_l+1,\cdots,n$)

第二台机床的加工时间为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$。因此加工时间为

$$T(J_1,\cdots,J_n)=a_1+b_1+\sum_{i=1}^{n}c_i+l((J_1,\cdots,Jn)$$

其中 $l(J_1,\cdots,Jn)=(b_2-c_1)+\cdots+(b_{k-1}-b_{k1-2})+\Big[(b_{k1}-b_{k1-2})$

$$+\sum_{i=2}^{k_1}(a_i-b_{i-1})\Big]+(b_{k1+1}-c_{k1})+\cdots+(b_{k2-1}-c_{k2-2})$$

$$+\Big[(b_{k2}-c_{k2-1})+\sum_{i=k_1+1}^{k_2}(a_i-b_{i-1})\Big]+\cdots+\Big[(b_{kl+1}-c_{kl})+\sum_{i=k_{l-1}+1}^{k_l}$$

$$(a_i-b_{i-1})\Big]+(b_{kl+1}-c_{kl})+\cdots+(b_n-c_{n-1})\qquad(2.8)$$

是三台机床加工n个零件的斜列和。

对一般m台机床加工n个零件的情况，设加工时间元素排列为

$$\begin{pmatrix} a_1^{[1]} & a_2^{[1]} & \cdots a_n^{[1]} \\ a_1^{[2]} & a_2^{[2]} & \cdots a_n^{[2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{1[m]} & a^{2[m]} & \cdots a_n^{[m]} \end{pmatrix}$$

求其加工时间 $T(J_1,\cdots,J_n)$ 可化为 $m-1$ 台机床加工n个的零件情况，其中第一台机床的加工时间为 $a_1^{[1]}+a_1^{[2]},\ a_2^{[2]},\ \cdots,\ a_{k1-1}^{[2]},\ a_{k1}^{[2]}+\sum_{i=2}^{K_1}(a_i^{[1]}-a_{i-1}^{[2]}),\ a_{k1+1}^{[2]},\ \cdots,\ a_{k2-1}^{[2]}$,

$$a_{k2}^{[2]}+\sum_{i=k_1+1}^{K_2}(a_i^{[1]}-a_{i-1}^{[2]}),\ \cdots,\ a_{kl}^{[2]}+\sum_{i=k_{l-1}+1}^{K_l}(a_i^{[1]}-a_{i-1}^{[2]}),\ a_{kl+1}^{[2]},\ \cdots,\ a_n^{[2]}$$

其中 $\sum_{j=k_{j-1}+1}^{P}(a_i^{[1]}-a_{i-1}^{[2]})\leqslant 0$ 　($P=k_{j+1},\cdots,k_{j-1}$

$\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}(a_i^{[1]}-a_{i-1}^{[2]})>0$ 　$j=1,2,\cdots,l$

$1=k_0<k_1<\cdots<k_l\leqslant n$)

及 $\sum_{i=k_l+1}^{P}(a_i^{[1]}-a_{i-1}^{[2]})\leqslant 0$ 　($P=k_l+1,\cdots,n$)

第v（ v = 2， …， m − 1 ）台床的加工时间为 $a_1^{[v+1]}$，$a_2^{[v+1]}$，…，$a_n^{[v+1]}$。

例　设有4台机床加工10个零件，各零件在各台机床的加工时间为

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
M_1	4	9	3	8	12	10	5	9	13	8
M_2	8	7	11	6	4	9	7	10	10	9
M_3	6	10	8	7	10	4	11	6	8	2
M_4	3	13	6	3	8	12	6	15	3	7

可看为三台机床加工10个零件的情况，容易算得加工时间为

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
	12	8	11	6	4	14	7	10	11	9
	6	10	8	7	10	4	11	6	8	2
	3	13	6	3	8	12	6	15	3	7

又可看为两台机床加工10个零件的情况，容易算得其加工时间为

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
	18	12	9	7	10	4	13	6	12	3
	3	13	6	3	8	12	6	15	3	7

因此　$T(J_1, \cdots, J_{10}) = 18 + (3+13+6+3+8+12+6+15+3+7)$
$+ 9 \dotplus (-4) \dotplus 1 \dotplus 7 \dotplus (-4) \dotplus 1 \dotplus (-3)$
$= 18 + 76 + 13 = 107$

§　关于相邻零件的排序

根据斜列和定义，可得下面不等式性质：

性质1　设Ai，B，Aj和Bj为任意正数，

且　$Ai \dotplus (Aj - Bi) \leqslant Aj \dotplus (Ai - Bj)$　（3.1）

成立。则对任意数B′，有下面不等式成立

$(Ai - B') \dotplus (Aj - Bi) \leqslant (Aj - B') \dotplus (Ai - Bj)$　（3.2）

性质2　设A″为任意数，则当不等式(3.2)成立时，下面不等式也成立

$(Ai - B') \dotplus (Aj - Bi) \dotplus (A'' - Bj) \leqslant (Aj - B') \dotplus (Ai - Bj) \dotplus (A'' - Bi)$

性质3　若把斜列和中某一正数（或负数）向前（向后）移动次序，则移动后斜别和的值不减。

设Ji和Jj在排列ω＝（Ji′，…，Ji″，Ji，Jj，Jj′，…，Jj″）中相邻，记ω′＝（Ji′，…，Ji″，Jj，Ji，Jj′，…，Jj″），利用性质1——3及（2.8）式可证

定理1　设Ji和Jj是加工顺序ω和ω′中相邻的零件，它们在M_1，M_2，M_3的加工时间为ai，bi，ci和aj，bj，cj，若

$bi = bj \leqslant \min(ai, aj, ci, cj)$

则当　$ai+(aj-ci)\leqslant aj+(ai-cj)$时，$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

在其余的情况，则当

$$\left.\begin{array}{l} bi+(bj-ci)\leqslant bj+(bi-cj) \\ ai+(aj-bi)\leqslant aj+(ai-bj) \end{array}\right\}$$

成立时，有$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

引理　设ai，aj，bi，bj为任意正数，若不等式$ai+(aj-bi)\leqslant aj+(ai-bj)$成立，则

$$\min(ai, bj)\leqslant\min(aj, bi)$$

也成立。反过来结论也正确。

讨论$aj-bi$和$ai-bj$的符号的各种可能性，便可得证。据此引理，定理1又可改写为

定理1′　设Ji和Jj是上面加工顺序ω和ω′中的相邻零件。若$bi=bj\leqslant\min(ai, aj, ci, cj)$，则当

$\min(ai, cj)\leqslant\min(aj, ci)$　时有$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

在其余的情况，则当

$$\left.\begin{array}{l} \min(ai, bj)\leqslant\min(aj, bi) \\ \min(bi, cj)\leqslant\min(bj, ci) \end{array}\right\}$$

成立时，有$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

定理2　设J_{n-1}和J_n分别是加工顺序

$\omega=(Ji', \cdots, Ji'', J_{n-1}, J_n)$和$\omega'=(Ji', \cdots, Ji'', J_n, J_{n-1}$的最)后两个相邻的零件，若

$$b_{n-1}+(b_n-c_{n-1})\leqslant b_n+(b_{n-1}-c_n) \quad (3.3)$$

$$(b_{n-1}+a_{n-1})+(b_n-c_{n-1})+(a_n-b_{n-1})\leqslant(b_n+a_n)+(b_{n-1}-c_n)+(a_{n-1}-b_n) \quad (3.4)$$

成立，则$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

证：把第2至第n－2个零件等效看为一个零件，设机床M_1，M_2和M_3从加工完第n－2个零件的时间分别为a′，b′和c′。

根据性质1，由(3.3)和(3.4)得

$$(b'+b_{n-1}-c_1-c')+(b_n-c_{n-1})\leqslant(b'+b_n-c_1-c')+(b_{n-1}-c_n) \quad (3.5)$$

$$[(b'+b_{n-1}-c_1-c')+(a'+a_{n-1}-b_1-b')]+(b_n-c_{n-1})+(a_n-b_{n-1})$$
$$\leqslant[(b'+b_n-c_1-c')+(a'+a_n-b_1-b')]+(b_{n-1}-c_n)+(a_{n-1}-b_n) \quad (3.6)$$

首先(3.6)式的右端总不超过对应于加工顺序ω′的斜列和。因为当$a'+a_n-b_1-b'>0$时就为斜列和；当$a'+a_n-b_1-b'\leqslant 0$时，将之移到$b_{n-1}-c_n$之后，其值不减，而这时为斜列和。

再看(3.5)和(3.6)的左端，有如下情况：

(1)若$a'+a_{n-1}-b_1-b'>0$，则(3.6)左端为斜列和。

(2)若$a'+a_{n-1}-b_1-b'\leqslant 0$，且$(a'+a_{n-1}-b_1-b')+(a_n-b_{n-1})\leqslant 0$，则当右端$a'+a_n-b_1-b'>0$时，由(3.5)式得

$$\begin{aligned} l(J_i', \cdots, J_i'', J_{n-1}, J_n) &= (b'+b_{n-1}-c_1-c') + (b_n-c_{n-1}) \\ &\leqslant (b'+b_n-c_1-c') + (b_{n-1}-c_n) \\ &\leqslant [(b'+b_n-c_1-c') + (a'+a_n-b_1-b')] + (b_{n-1}-c_n) \\ &\leqslant l(J_i', \cdots, J_i'', J_n, J_{n-1}) \end{aligned}$$

而当 $a'+a_n-b_1-b'\leqslant 0$时，由（3.5)式有

$$\begin{aligned} l(J_i', \cdots, J_i'', J_{n-1}, J_n) &\leqslant (b'+b_n-c_1-c') + (b_{n-1}-c_n) \\ &\leqslant (b'+b_n-c_1-c') + (b_{n-1}-c_n) + [(a'+a_n-b_1-b') + (a_{n-1}-b_n)] \\ &= l(J_i', \cdots, J_i'', J_n, J_{n-1}). \end{aligned}$$

（3）若$a'+a_{n-1}-b_1-b'<0$，而$(a'+a_{n-1}-b_1-b')+(a_n-b_{n-1})>0$时，此$b_n-c_{n-1}>0$，则(3.6)式左端为代数和；当$b_n-c_{n-1}\leqslant 0$，但$(a'+a_{n-1}-b_1-b')+(b_n-c_{n-1})+(a_n-b_{n-1})>0$时，(3.6)左端为代数和，将$a'+a_{n-1}-b_1-b'$移到$b_n-c_{n-1}$之后，再写为斜列和，其值不变，而当$(a'+a_{n-1}-b_1-b')+(b_n-c_{n-1})+(a_n-b_{n-1})\leqslant 0$时，由(3.5)式，有

$$\begin{aligned} l(J_i', \cdots, J_{n-1}, J_n) &= b'+b_{n-1}-c_1-c' \\ &\leqslant (b'+b_n-c_1-c') + (b_{n-1}-c_n) \leqslant l(J_i', \cdots, J_i'', J_n, J_{n-1}) \end{aligned}$$

综上所述，都有$l(J_i', \cdots, J_i'', J_{n-1}, J_n)\leqslant l(J_i', \cdots, J_i'', J_n, J_{n-1})$。两边再加上$a_1+b_1+\sum_{i=1}^{n} c_i$，便得$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

因为任一排序问题的最优顺序序是逆顺序的逆问题的最优顺序[3]，因此由定理又可得

定理2′ 设J_1和J_2是加工顺序$\omega=(J_1, J_2, J_i', \cdots, J_i'')$和$\omega'=(J_2, J_1, J_i', \cdots, J_i'')$的排在最前的两个相邻零件，如果

$$b_2+(b_1-a_2)\leqslant b_1+(b_2-a_1)$$

$$(b_2+c_2)+(b_1-a_2)+(c_1-b_2)\leqslant(b_1+c_1)+(b_2-a_1)+(c_2-b_1)$$

成立，则$T(\omega)\leqslant T(\omega')$。

本文是1979年12月26日投稿的，1980年出版的文献〔4〕，把〔2〕中 $m\times n$ 排序问题两个相邻零件先后次序的判别条件做了简化，本文的定理1，1′指出，对$m=3$，〔3〕，〔4〕中的这个条件实际上可再简化为两个不等式。

参 考 文 献

〔1〕 Johnson S·M, Opitimal Two—and—Three stage production Stage production Schedules with setup Times Included, Naval Res. Logis. Quart. 1：1（1954），61—68。

〔2〕 越民义 韩继业《n个零件在m台机床上的加工顺序问题（Ⅰ）》，《中国科学》，5（1975），462—470。

〔3〕 越民义 韩继业《排序问题中的一些数学问题》，《数学的实践与认识》，3（1976），59—70；4（1976），62—77。

〔4〕 韩继业《排序问题的一个判别条件和一类特殊的m×n排序问题》，《应用数学学报》1980年3卷4期，301—305。