非独立变量的随机大数定理

数 学 系　吴绍敏

一　引　言

设$\{\xi_k\}$是随机变量序列，作和

$$\zeta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

是通常 n 个随机变量之和的序列，若把 n 换成正整值随机变数 v_n，则得随机和序列

$$\zeta_{v_n}=\sum_{k=1}^{v_n}\xi_k$$

随机和变量在随机游动，序列分析，系统可靠性以及与 Monte Carle 方法有关等方面都有广泛的应用，于是引起了数学工作者的重视和研究。最初，是在独立变量序列$\{\xi_k\}$与v_n无关的条件下研究随机极限定理，后来有人发现与v_n无关的条件可以减轻为事件"$v_n=k$"与事件"$\xi_k<x$"独立即可。

A. Renyi[1] 在保持$\{\xi_k\}$是独立变量序列的条件下，而去掉对v_n的以上限制，研究随机极限定理。

张惟明[2]认为概率论的中心问题有两个：一是中心极限定理，二是大数定理，所以他在独立变量序列的情况下，研究随机大数定理。

虽然许多实际问题中只牵涉到独立变量序列，但客观的事物总是相互关联的，本文是讨论非独立变量序列$\{\xi_k\}$的随机大数定理。且把〔2〕中的个别结果看作本文的特例。

二　非独立变量随机大数定理

设$\{\xi_k\}$为随机变量序列，不失一般性(下同)假设$E\xi_k=0$（$k=1,2\cdots$），若

$$\zeta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\longrightarrow 0$$

则称$\{\xi_k\}$大数定理成立。

如果以正整值随机变数v_n取代整数n，作随机和的均值

$$\zeta_{v_n}=\frac{1}{v_n}\sum_{k=1}^{v_n}\xi_k$$

对$n\to\infty$时，$v_n\xrightarrow{p}\infty$的正整值随机变数v_n，若当$n\to\infty$时，$\zeta_{v_n}\xrightarrow{p}0$，则称$\{\xi_k\}$依$v_n$随

机大数定理成立。类似地，对 $n\to\infty$ 时，$\nu_n\to\infty$ (a、s)的正整值随机变数 ν_n，若 $n\to\infty$ 时，$\zeta_{\nu_n}\to 0$ (a、s)，则称 $\{\xi_k\}$ 依 ν_n 随机强大数定理成立，以上是〔2〕的定义。

本文的定义是，若 $n\to\infty$，$\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$，则称 $\{\xi_k\}$ 随机大数定理成立。若 $n\to\infty$，$\zeta_{\nu_n}\to 0$ (a、s)则称 $\{\xi_k\}$ 随机强大数定理成立。

定理 1：$\{\xi_k\}$ 是随机变数序列，$\nu_n=[n\lambda]$，λ 是正值离数随机变量，记其可能值全体为 $\{\lambda_k\}$

则 $$\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)=0\quad(k=1,2\cdots)$$

证明：因对任给 $\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)$$

若 $$\zeta_{[n\lambda]}\xrightarrow{P}0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)=0$$

反之，若 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)=0\quad(k=1、2\cdots)$$

又因 $P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)\leqslant P(\lambda=\lambda_k)$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty}P(\lambda=\lambda_k)=1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)$$ 〔3〕

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)=0$$ 证毕。

定理 2：$\nu_n=[n\lambda]$，若 $\zeta_n\xrightarrow{P}0$ 则 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$

证明：因 $\zeta_n\xrightarrow{P}0$　∴ 对任给 $\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P(|\zeta_n|>\varepsilon)=0$

而 $$P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)\leqslant P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon\right)$$

因 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon\right)=0$ 所以 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\zeta_{[n\lambda_k]}\right|>\varepsilon,\ \lambda=\lambda_k\right)=0$

根据定理 1，$\zeta_{[n\lambda]}\xrightarrow{P}0$。

定理 3：$\nu_n=[n\lambda]$ (a、s)，若 $\zeta_n\xrightarrow{P}0$ 则 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$。

证明：因 $$P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\nu_n=[n\lambda]\right)+P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\nu_n\neq[n\lambda]\right)$$
$$\leqslant P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)+P\left(\nu_n\neq[n\lambda]\right)$$

因 $P\left(\nu_n \neq [n\lambda]\right)=0$，再根据定理2：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)=0$，即 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$。

〔2〕中的定理1是定理3的特例。

定理4；$\nu_n-[n\lambda]\xrightarrow{P}0$，若 $\zeta_n\xrightarrow{P}0$，则 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$

证明：对任意的 $\varepsilon>0$，$1>\sigma>0$

因 $P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\geq\sigma\right)+P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\right.$

$\left.<\sigma\right)\leqslant P\left(\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\geq\sigma\right)+P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ [n\lambda]-\sigma<\nu_n<[n\lambda]+\sigma\right)$

$$=P\left(\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\geqslant\sigma\right)+P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)$$

$\because\ \nu_n-[n\lambda]\xrightarrow{P}0$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\nu_n-[n\lambda]\right|\geqslant\sigma\right)=0$，根据定理2，

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\zeta_{[n\lambda]}\right|>\varepsilon\right)=0$，$\therefore \zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$。

定理5：$\{\xi_k\}$ 是随机变量序列，$\nu_n\xrightarrow{P}\infty$，且事件"$\nu_n=k$"与事件"$|\zeta_k|>\varepsilon$"独立，若 $\zeta_n\xrightarrow{P}0$ 则 $\zeta\nu_n\xrightarrow{P}0$

证明：因 $\nu_n\xrightarrow{P}0$，$\therefore$对任给 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在一个N，当 $n>N$ 时 $P(|\zeta_n|>\varepsilon)<\delta/2$，因 $\nu_n\xrightarrow{P}\infty$，$\therefore$对上述的 $\delta>o$ 和N存在一个 N'。

当 $n>N'$ 时 $P(\nu_n\leqslant N)<\delta/2$。

$$\therefore P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n\leqslant N\right)+P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n>N\right)$$

$$\leqslant P\left(\nu_n\leqslant N\right)+P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n>N\right)$$

$$P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n>N\right)=P\left(\bigcup_{k>N}^{\infty}(|\zeta_k|>\varepsilon,\ \nu_n=k)\right)\qquad (\text{对 k 求和})$$

$$=\sum_{k>N}^{\infty}P(|\zeta_k|>\varepsilon,\ \nu_n=k)=\sum_{k>N}P(|\zeta_k|>\varepsilon)\,P(\nu_n=k)$$

$$\leqq\delta/2\sum_{k>N}P(\nu_n=k)\leqq\delta/2$$

即当 $n>N'$ 时 $P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)<\delta$，$\therefore\ \zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$ 证毕。

定理6：$\{\xi_k\}$ 是随机变量序列，$\nu_n\xrightarrow{P}\infty$；事件"$\nu_n=k$"与事件"$|\zeta_k|>\varepsilon$"独立，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{n^2}=0$，则 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$。

证明：由马尔柯夫大数定理和定理5即得。

定理7：若 $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$，$\zeta_n \to 0$（a，s）则 $\zeta_{\nu_n} \xrightarrow{P} 0$。

证明：因对任意 $\varepsilon > 0$

$$\zeta_n \to 0\ (a,\ s) \Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(|\zeta_n|>\varepsilon)\right)=0$$

∴对任给 $\delta>0$，存在一个 N_1 使得 $P\left(\bigcup_{n=N_1}^{\infty}(|\zeta_n|>\varepsilon)\right)<\delta/2$

∵ $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$ ∴对上述的 $\delta>0$ 和 N_1 一定存在一个 N_2 当 $n>N_2$ 时 $P(\nu_n\leqq N_1)<\delta/2$

而 $$P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n\leqq N_1\right)+P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n>N_1\right)$$

$$\leqq P(\nu_n\leqq N_1)+P\left(\bigcup_{k=N_1}^{\infty}\left|\zeta_k\right|>\varepsilon,\ \nu_n=k\right)$$

$$\leqq P(V_n\leqq N_1)+P\left(\bigcup_{n=N_1}^{\infty}\left|\zeta_n\right|>\varepsilon\right)$$

∴ 当 $n>N_2$ 时 $P\left(\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)<\delta$，即 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$。

推论：$\{\xi_k\}$ 是独立同分布的变量序列，$E(\xi_k)=0$（$k=1,2\cdots$）$\nu_n\xrightarrow{P}\infty$ 则 $\zeta_{\nu_n}\xrightarrow{P}0$

证明：由柯尔莫果洛夫强大数定理和定理7即得证。

定理8：$\nu_n\to\infty$（a、s），$\zeta_n\to 0$（a、s）则 $\zeta_{\nu_n}\to 0$（a，s）

证明：对任给的 $\varepsilon>0$ 和 m

$$\because\ \left(\omega:\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon\right)=\left(\omega:\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\ \nu_n\leqq m\right)\cup\left(\omega:\left|\zeta_{\nu_n}\right|>\varepsilon,\nu_n>m\right)$$

$$\supseteq(\omega:\nu_n\leqslant m)\cup\left\{\bigcup_{k=m}^{\infty}(|\zeta_k|>\varepsilon,\ \nu_n=k)\right\}$$

$$\supseteq(\omega:\nu_n\leqslant m)\cup\left\{\bigcup_{k=m}^{\infty}(|\zeta_k|>\varepsilon)\right\}$$

$$\therefore\ \bigcup_{n=N}^{\infty}(\omega:|\zeta_{\nu_n}|>\varepsilon)\supseteq\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty}(\omega:\nu_n\leqq m)\right\}\cup\left\{\bigcup_{k=m}^{\infty}(|\zeta_k|>\varepsilon)\right\}$$

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(|\zeta_{\nu_n}|>\varepsilon)\right)\leqq P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(\nu_n\leqq m)\right)+P\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}(|\zeta_k|>\varepsilon)\right)\qquad (*)$$

$$\because\ \nu_n\to\infty\ (a,\ s)\Longleftrightarrow\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(\nu_n\leqq m)\right)=0$$

$$\zeta_n\to 0\ (a,\ s)\Longleftrightarrow\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}(|\zeta_k|>\varepsilon)\right)=0$$

于是在(*)式中，先令N→∞，再令m→∞即得

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}(|\xi_{v_n}|>\varepsilon)\right)=0 \Longleftrightarrow \xi_{v_n}\to 0\ (a、s)$$证毕。

〔2〕中的定理3，表面上看是定理8的特例，但在其证明过程中未用到$\{\xi_k\}$独立的条件，因此应看作与定理8等价。

三　附　注

1、在定理1—4中，若把〔nλ〕换为〔ω(n)λ〕，其中ω(n)是→∞(n→∞)的正数，定理仍然成立。

2，在定理1—2中，若$[n\lambda_k]<1$，则规定$\xi_{[nv_k]}=0$

参考文献

〔1〕A. Renyi, on the Central limit theorem for the Sum of a random number independent random varibles Acta Math Acal Sci Humg 11(1960) P97-102

〔2〕《随机大数定理》张帷明、郑州大学、科研处印，一九八〇年十一月

〔3〕《实变函数论与泛函分析》上册，夏道行等编。