RLC非周期放电电路的一点性质

电脑系　王少雄

提　要

本文证明RLC非周期放电电路的参数具有时间常数$r_C \cdot C = L/r_L$的特性（式中$r_C + r_L = R$），並用以解释这种电路为什么不能产生振荡。

具有初始电压U_0的电容器C通过RL串联电路放电的电路图如图一所示。

当电路参数满足$R \geqslant 2\sqrt{L/C}$时，放电的电容器的电压从U_0一直降到零，不发生电容器的再充电，理论电工学称这种放电为电容器的非周期放电。在图示设定的正方向下，整个非周期放电过程有：$u_C > 0$；$i < 0$；$u_R < 0$。

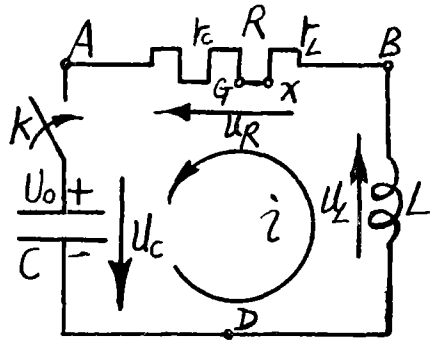

图　一

时间常数是研究过渡过程的一个重要物理量。现在我们证明，对于RLC非周期放电电路，其电阻R一定可以分为两部份r_C和r_L（图一中G点为其分界点），使得r_C和C的时间常数$r_C \cdot C$等于r_L和L的时间常数L/r_L。也就是说，对于RLC非周期放电电路，下列方程有实数解。

$$\left.\begin{aligned} R &= r_C + r_L \\ r_C \cdot C &= L/r_L \end{aligned}\right\}$$

此方程组的解为：

$$r_C = \frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}$$

$$r_L = \frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}$$

对于非周期放电情况，因为$R \geqslant 2\sqrt{\frac{L}{C}}$，故方程组的解$r_C$和$r_L$均为实数。特别是$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$的临界情况，$r_C = r_L = \frac{R}{2}$。而对于周期放电情况，因$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$，方程组无实数解，故周期放电电路没有这种特性。

下面我们来讨论非周期放电电路的这种性质（$r_C \cdot C = L/r_L$）和这种电路不能产生周期放电有什么联系。为此我们先来讨论一下非周期放电的能量过程。电容器放电的开始阶段，电

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

容C释放的电场能量一部份供电阻R上的损耗，另一部份用以建立电感L的磁场。此阶段电感电压 $u_L<0$，它反映电感L吸收能量，用以建立並增强磁场。当放电的电流达到最大值时，电感储能最大，此时 $u_L=0$（图一中的B点和D点此刻等电位）。放电的后阶段，电感的磁场将不断释能，电压 $u_L>0$，而电容C仍将继续释放电场能量，二者全部消耗于电阻上转变为热能。此后阶段电阻R上的压降 $u_{AB}=u_C+u_L=-u_R$，在R上可以找到对应的一个X点，使得X点与D点等电位 $u_{XD}=0$（参看图一），並有 $u_C=u_{AX}$，$u_L=u_{XB}$，也就是说，A点与X点之间电阻的耗能由电容器释能提供，而X点与B点之间电阻的耗能则由电感释能提供。显然，如果X点发生移动，那就意味着电场释能和磁场释能比例的改变。因为 $u_C=u_{AX}$，$u_L=u_{XB}$，所以 $f(t)=\frac{u_C(t)}{u_L(t)}$ 随时间的变化情况就反映了X点的移动方向。

由理论电工学知道，放电过程中电容电压 u_C 的微分方程为：

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

对于非周期放电情况 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$，微分方程的解：

$$u_C=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t})$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\cdot C\frac{d^2u_C}{dt^2}=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t})$$

式中：$p_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$

$$p_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$$

並有　$p_2<p_1<0$

因此，$f(t)=\frac{u_C(t)}{u_L(t)}=\frac{p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t}}{p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t}}$

经运算可得

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{e^{p_1t}\cdot e^{p_2t}}{(p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t})^2}\cdot(p_1-p_2)^2(p_1+p_2)$$

因为 $\frac{e^{p_1t}\cdot e^{p_2t}}{(p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t})^2}\cdot(p_1-p_2)^2>0$，$p_1+p_2<0$

所以 $\frac{df(t)}{dt}<0$，X点不断地由B点向A点的方向移动，电阻耗能中由磁场释能提供的那部份的比例不断增加。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

对于非周期放电的临界情况 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$。微分方程的解：

$$u_C=U_0(1-pt)e^{pt}$$

$$u_L=-U_0(1+pt)e^{pt}$$

式中 $p=-\frac{R}{2L}<0$

因此 $f(t)=\frac{u_C(t)}{u_L(t)}=-\frac{U_0(1-pt)e^{pt}}{U_0(1+pt)e^{pt}}=\frac{pt-1}{pt+1}$

经运算可得：

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{2p}{(pt+1)^2}<0$$，结论和非周期放电时相同。

上面证明了电阻耗能中由磁场释能提供部份的比例（相对于由电场释能提供的部份）随着时间的推移而增长，它体现为与D点等电位的X点不断地由B向A的方向移动。我们知道，电容C的反向充电是电路产生周期放电过程中必然要出现的现象，而反向充电的开始瞬间，$u_C=0$，$i\neq 0$，X点应该到达A点，电阻R上的能耗此时应全部由电感释能提供。也就是说，X点移动到A点是周期放电的必要条件。反之，如果X点移不到A点，则电路必然不能产生周期放电。下面我们来证明，对于非周期放电电路，X点的移动极限点是G点，X点达不到A点。

对于非周期放电电路 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_C(t)}{u_L(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t}}{p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t}}$$

分子分母同时除以 e^{p_1t}，並注意 $\lim_{t\to\infty}e^{(p_2-p_1)t}=0$

则有：$\lim_{t\to\infty}\frac{u_C(t)}{u_L(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{p_2-p_1e^{(p_2-p_1)t}}{p_1-p_2e^{(p_2-p_1)t}}=\frac{p_2}{p_1}$ 分子分母均乘以 $-L$ 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_C(t)}{u_L(t)}=\frac{\frac{R}{2}+\sqrt{\frac{R^2}{4}-\frac{L}{C}}}{\frac{R}{2}-\sqrt{\frac{R^2}{4}-\frac{L}{C}}}=\frac{r_C}{r_L}$$

对于临界情况 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_C(t)}{u_L(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{pt-1}{pt+1}=1=\frac{r_C}{r_L}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

故X点的移动极限为G点。

上面的数学推导证明，G点一方面具有使电路两边时间常数相等的性质，另一方面G点又是X点的移动极限。现在的问题是这两方面彼此有什么关系？G点使电路两边时间常数相等的物理意义是什么？为此我们分析图二电路，假设某一瞬间X点移动到G点（上面已证明，X点移动到G点是发生在时间无限长时，这里的分析只是一种设想），並设此瞬间电容电压为u_{cg}，回路电流为i_g，因为假设X点移动到G点，所以$u_{GD}=0$，此瞬间回路电流与电容电压应满足如下关系：

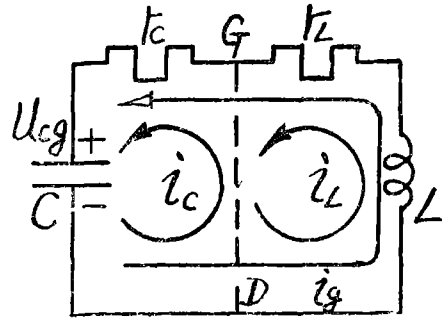

图　二

$$i_g=-\frac{u_{cg}}{r_c}$$

如果用一导线联接GD两点如图二所示，则电路可视为两个回路，它们的电流均为i_g，而两回路共同支路GD上的电流为零。因为两回路的时间常数相等$r_c\cdot C=L/r_L$，故此后两回路电流将一直相等並为：

$$i_C=i_g e^{-\frac{1}{r_c C}t}=i_g e^{-\frac{r_L}{L}t}=i_L$$

导线GD上永远不会有电流，导线GD的存在与否並不影响原电路的情况，u_{GD}将永远为零，X点不再移动。

由以上的分析可以看出，从时间常数相等$r_c\cdot C=L/r_L$就可导出X点的移动越不过G点的结论，而由于X点越不过G点，则电容器不能产生反向充电，故这种放电电路决不能产生振荡。

参 考 文 献

〔1〕西安交通大学邱关源主编："电路"，人民教育出版社，1978。

〔2〕俞大光编："电工基础"，高等教育出版社，1965。

〔3〕M. И. Конторович: Операционное исчисление N процессы В электрических цепях. Nздательство 《Hayka》，1964。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net