

具有交叉柔性斜杆四边形空间塔架的计算

土木工程系 施玉山

提 要

本文利用空间桁架法直接推导出具有交叉柔性斜杆四边形空间塔架的塔柱和斜杆内力的计算公式。计算时,直接把节点荷载代入计算公式,选择带有正号斜杆内力及其相应塔柱内力即可。这样,较之于利用逐次渐近计算法节省时间又提高计算结果的准确度。

一 序

在高耸塔架中,目前国内较广泛地采用圆截面可预加拉力的交叉柔性斜杆并使塔身轮廓近似于抛物线型的结构方案。但由于柔性斜杆只能承受拉力而不能起受压杆的作用。所以,整个塔架的斜杆实际上将只有一部份工作而另一部份不工作,也就是这部份不工作的斜杆原先受压而当压力超过其临界值后斜杆将暂时失稳而不参加工作。由于斜杆有预加拉力,当卸载时或压力小于预加的拉力时,斜杆将仍然处于张拉状态。根据不同荷载的组合情况,这些斜杆将会有时受拉有时受压。一般说来,要事先断定哪些是受拉杆或受压杆是困难的。因此,这种多边形空间桁架,目前只能用逐次渐近法经过多次逼近计算才能完成。除了计算工作量较大以外,由于多次运算,数值的有效位数将减少,影响了其计算结果的准确性。本文,根据四边形塔架受力和构造的特殊性,按斜杆可能受力的不同情况,分别推导出其内力计算公式,供直接使用。

二 基 本 假 定

根据塔架的构造和受力特点,兹作如下假定^[1]。

- 1、塔架为空间桁架,所有各杆件的交会点,均为理想的铰接点。
- 2、各杆件的工作,完全处于弹性阶段。
- 3、在侧向和重力荷载作用下,塔架的变形符合平面假定,其横截面亦保持几何不变。
- 4、横杆为一不可拉伸和不可压缩的刚性杆。

三 计算简图和内力方程

从塔架中取截面 1—1 无穷接近于任意一个 i 节间上端的截面,如图一所示。此节间以上塔架的垂直荷载用 ΣP 表示。侧向荷载 $q(z)$ 可简化成节点弯矩和剪力,分别用 M 和 Q 表示,并作用于节间上端。节间下端与计算无关,上部结构物的平衡可由 ΣP 、 M 和 Q 代替。所

以, 整个空间桁架可逐层简化成以节间 H_i 为高度的计算单元。如图二所示。下面根据不同的风向 W_1 和 W_2 , 将斜杆内力正负号可能出现情况分述如下:

(一) W_1 风向作用情况:

情况甲: 计算简图如图三(甲)所示。取直角坐标, z 轴向下为正, x 和 y 轴方向如图。图中实线斜杆表示受拉杆, 虚线表示已暂时失稳的受压斜杆。截面 1—1 所截取的塔柱内力用 N , 斜杆内力用 S , 用正号表示拉力, 负号表示压力。

1、变形协调条件

假设塔架受力后产生了变形如图四。节点 b 由原来位置移到 b' 处, 斜杆原长度为 L_s , 增长了 ΔL_s , 塔柱原长度为 L_k , 增长了 ΔL_k 。根据几何关系可知

$$\Delta L_s = \Delta L_k \frac{L_s}{L_k}$$

又根据基本假定, 变形后塔柱和斜杆内力可用下面关系式表达:

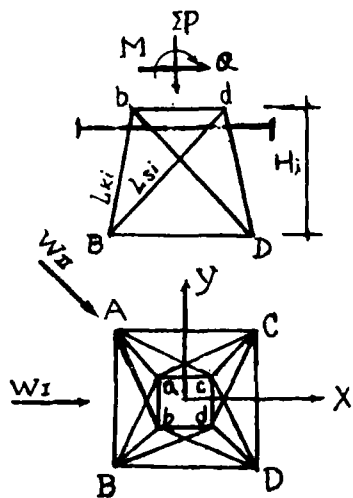
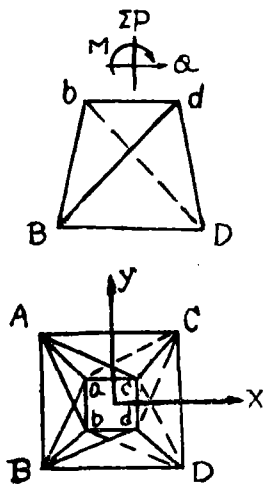


图 二



图三(甲)

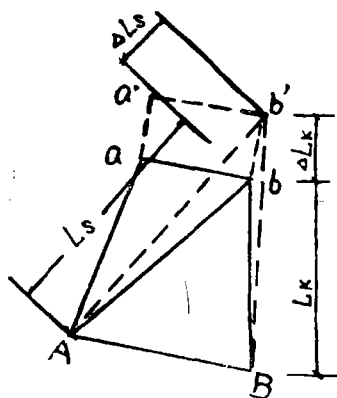


图 四

$$S_{Ab} = E_s F_s \frac{\Delta L_s}{L_s}$$

$$N_B = E_k F_k \frac{\Delta L_k}{L_k}$$

其中 F_s 、 F_k 分别为斜杆和塔柱横截面面积, E_s 、 E_k 分别为斜杆和塔柱材料的弹性模量。

由上面二式可得

$$S_{bA} = \left(\frac{L_k}{L_s} \right)^2 \left(\frac{F_s}{F_k} \right) \cdot N_B$$

引用记号

$$\eta = \left(\frac{L_k}{L_s} \right)^2 \left(\frac{F_s}{F_k} \right)$$

得塔柱和斜杆在变形时所产生的内力必须满足下面的关系:

$$S_{bA} = \eta N_B \quad \dots\dots\dots (1)$$

2、对称条件: 根据塔架受力和构造特点, 可得到下面几个满足对称条件的内力方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_A = N_B \quad \dots\dots\dots (2) \\ N_C = N_D \quad \dots\dots\dots (3) \\ S_{bA} = S_{aB} \quad \dots\dots\dots (4) \\ S_{bD} = S_{cA} \quad \dots\dots\dots (5) \end{array} \right.$$

3、平衡条件: 由图三(甲)可知, 其未知内力塔柱有四个, 斜杆有四个。这八个未知量可由变形条件和对称条件得出的五个内力方程与下面三个静力平衡条件联合求解。

$$\Sigma F_z = 0:$$

$$(N_A + N_B + N_C + N_D) \frac{H_k}{L_k} + (S_{bD} + S_{aC} + S_{aB} + S_{aA}) \frac{H}{L_s} + \Sigma P = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$Q - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{D-d}{2L_h} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{dB} + S_{cA}) \frac{D+d}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{aB} + S_{bA})$$

$$\frac{D-d}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

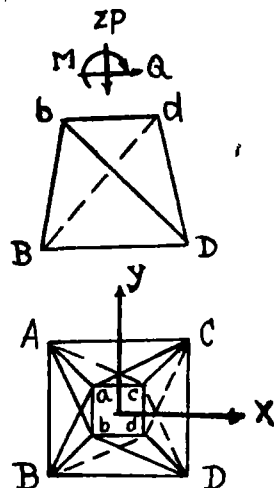
$$\Sigma M_y = 0:$$

$$M - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{Hd}{2L_h} \cos \frac{\pi}{4} + (S_{dB} + S_{cA}) \frac{Hd}{2L_s}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - (S_{bA} + S_{aB}) \frac{Hd}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

上面方程中 D 表示平截面 $ABCD$ 的外接圆直径, d 表示 $abcd$ 的外接圆直径。

情况乙: 计算简图如图三(乙)所示, 同情况甲一样, 由变形条件, 对称条件和平衡条件所组成的八个内力方程如下:



图三(乙)

$$S_{bA} = \eta N_B \dots\dots\dots (1)$$

$$N_A = N_B \dots\dots\dots (2)$$

$$N_C = N_D \dots\dots\dots (3)$$

$$S_{bA} = S_{aB} \dots\dots\dots (4)$$

$$S_{aC} = S_{bD} \dots\dots\dots (5)$$

$$(N_A + N_B + N_C + N_D) \frac{H}{L_k} + (S_{aB} + S_{Ab} + S_{aC} + S_{bA}) \frac{H}{L_s} + \Sigma P = 0 \dots\dots (6)$$

$$Q - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{D-d}{2L_k} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{aB} + S_{Ab}) \frac{D-d}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} + (S_{aC} + S_{bD}) \frac{D+d}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \dots\dots (7)$$

$$M - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{Hd}{2L_k} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{aC} + S_{bD}) \frac{Hd}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{Ab} + S_{aB}) \frac{Hd}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \dots\dots (8)$$

(二) W_2 风向:

情况(甲):

计算简图如图五(甲)所示。

其内力方程为:

$$S_{bA} = \eta (N_B - N_D) + S_{Bd} \dots\dots\dots (1)$$

$$N_B = N_C \dots\dots\dots (2)$$

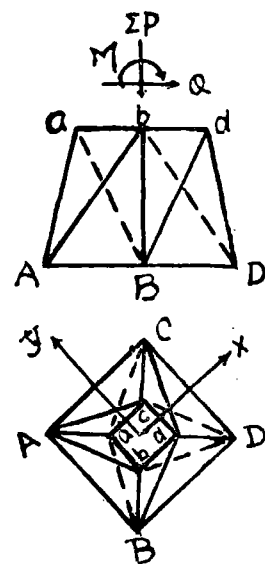
$$N = \frac{1}{2} (N_A + N_D) \dots\dots\dots (3)$$

$$S_{Ab} = S_{AC} \dots\dots\dots (4)$$

$$S_{Bd} = S_{Cd} \dots\dots\dots (5)$$

$$(N_A + N_B + N_C + N_D) \frac{H}{L_k} + (S_{Bd} + S_{CA} + S_{bA} + S_{dC}) \frac{H}{L_s} + \Sigma P = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$Q - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{D-d}{2L_k} (S_{dB} + S_{CA}) \frac{D+d}{2L_s} - (S_{bA} - S_{dC})$$



图五(甲)

$$\frac{D-d}{2L_s} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$M - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{Hd}{2L_k} + (S_{dB} + S_{cA}) \frac{Hd}{2L_s} + (S_{dC} - S_{bA}) \frac{Hd}{2L_s} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

情况乙：计算简图如图五(乙)所示。其内力方程为：

$$N_B = N_C \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$N_B = \frac{1}{2} (N_A + N_D) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$S_{aC} = S_{aB} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$S_{cD} = S_{bD} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$S_{bD} = \eta (N_B - N_A) + S_{aB} \quad \dots\dots\dots (5)$$

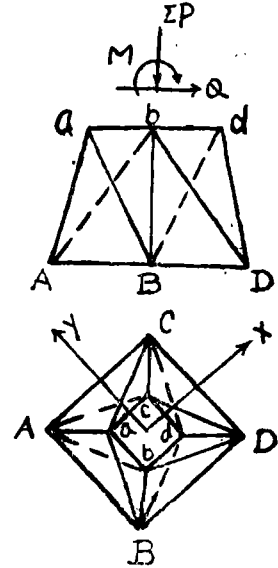
$$(N_A + N_B + N_C + N_D) \frac{H}{L_k} + (S_{aB} + S_{cD} + S_{aC} + S_{bD}) \frac{H}{L_s} +$$

$$\Sigma p = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$Q - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{D-d}{2L_k} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{aC} + S_{bD})$$

$$- \frac{D-d}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{aB} - S_{cD}) \frac{D+d}{2L_s} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$M - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{Hd}{2L_k} \cos \frac{\pi}{4} - (S_{aC} + S_{bD}) \frac{Hd}{2L_s} + (S_{cD} - S_{aB}) \frac{Hd}{2L_s} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$



图五(乙)

情况丙：计算简图如图五(丙)所示。其内力方程为：

$$N_B = N_C \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$N_B = \frac{1}{2} (N_A + N_D) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$S_{aB} = S_{aC} \quad \dots\dots\dots (3)$$

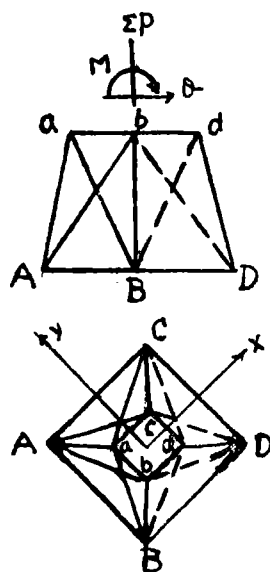
$$S_{Ab} = S_{Ac} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$S_{Ab} = \eta (N_B - N_D) - S_{aB} \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} & (N_A + N_B + N_C + N_D) \frac{H}{L_k} + (S_{CA} + S_{aC} + S_{bA} + S_{aB}) \frac{H}{L_s} + \\ & \Sigma p = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{D-d}{2L_k} - (S_{CA} - S_{aC}) \frac{D+d}{2L_s} - \\ (S_{aB} + S_{bA}) \frac{D-d}{2L_s} = 0 \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M - (N_A + N_B - N_C - N_D) \frac{Hd}{2L_k} + (S_{CA} - S_{aC}) \frac{Hd}{2L_s} - \\ (S_{aB} + S_{bA}) \frac{Hd}{2L_s} = 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$



图五(丙)

四 塔柱和斜杆内力公式

根据第三部份列出的各种内力方程式,可分别计算出塔柱和斜杆内力。

(1) W_1 风向:

情况甲:

$$N_A = N_B = M\psi \frac{I}{1} - \frac{\Sigma PL_s}{4H} \xi \frac{I}{1}$$

$$N_D = N_C = -M\psi \frac{I}{2} - \frac{\Sigma PL_k}{4H} - Q\varnothing \frac{I}{1}$$

$$S_{bA} = S_{aB} = \eta N_B$$

$$S_{bd} = S_{CA} = -N_B \left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right) - N_D \frac{L_s}{L_k} - \frac{\Sigma PL_s}{2H}$$

情况乙:

$$N_A = N_B = M\psi \frac{I}{4} - \frac{\Sigma PL_k}{4H} \xi \frac{I}{2} + Q\varnothing \frac{I}{2}$$

$$N_D = N_C = -M\psi \frac{I}{3} - \frac{\Sigma PL_k}{4H}$$

$$S_{bA} = S_{aB} = \eta N_B$$

$$S_{aC} = S_{bD} = -N_B \left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right) - N_D \frac{L_s}{L_k} - \frac{\Sigma PL_s}{2H}$$

选用内力时,可根据甲、乙二种情况,选择具有正号斜杆内力及其相应的塔柱内力作为塔架在 w_1 风向作用下,斜杆和塔柱实际计算内力。其中 ψ 、 ξ 、 \varnothing 等均为塔架几何特征系数。

(2) W_2 风向:

情况甲:

$$N_A = M\psi_1 \frac{\Sigma PL_k}{4H} - Q\varnothing_1$$

$$N_D = M\psi_2 \frac{\Sigma PL_k}{4H} - Q\varnothing_2$$

$$N_B = N_C = \frac{1}{2} (N_A + N_D)$$

$$S_{Bd} = S_{Cd} = 0.5 \frac{L_s}{L_k} (N_A - N_D) - \frac{ML_s}{Hd}$$

$$S_{Ab} = S_{Ac} = 0.5 \left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right) (N_A - N_D) - \frac{ML_s}{Hd}$$

情况乙:

$$N_A = -M\psi_2 \frac{\Sigma PL_k}{4H} + Q\varnothing_1$$

$$N_D = -M\psi_1 \frac{\Sigma PL_k}{4H} + Q\varnothing_2$$

$$N_B = N_C = \frac{1}{2} (N_A + N_D)$$

$$S_{aB} = S_{aC} = \frac{ML_s}{Hd} - 0.5 \frac{L_s}{L_k} (N_A - N_D)$$

$$S_{CD} = S_{bD} = \frac{ML_s}{Hd} - 0.5 \left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right) (N_A - N_D)$$

情况丙:

$$N_A = M\psi \frac{\sum PL_k}{3} - \frac{\sum PL_k}{4H} + Q\varnothing \frac{\sum PL_k}{3}$$

$$N_D = -M\psi \frac{\sum PL_k}{3} - \frac{\sum PL_k}{4H} - Q\varnothing \frac{\sum PL_k}{3}$$

$$N_B = N_C = \frac{1}{2} (N_A + N_D)$$

$$S_{aB} = S_{aC} = \frac{ML_s}{Hd} - 0.5 \frac{L_s}{L_k} (N_A - N_D)$$

$$S_{Ab} = S_{Ac} = 0.5 \left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right) (N_A - N_D) - \frac{ML_s}{Hd}$$

选用内力时,可根据甲、乙、丙三种情况选择具有正号斜杆内力及其相应的塔柱内力作为塔架在 w_2 风向作用下斜杆和塔柱实际计算内力。

(3) 塔架几何特征系数

$$\psi_1 = \frac{L_s}{\sqrt{2}Hd \left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right)}, \quad \psi_2 = \frac{L_k}{\sqrt{2}DH}$$

$$\psi_3 = \frac{L_k}{\sqrt{2}Hd}$$

$$\psi_4 = \frac{L_k}{\sqrt{2}HD \left(1 + \eta \frac{L_k}{L_s} \right)}, \quad \xi_1 = \frac{1}{\left(\eta + \frac{L_s}{L_k} \right)}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2 \left(1 + \eta \frac{L_k}{L_s} \right)}, \quad \eta = \left(\frac{L_k}{L_s} \right)^2 \left(\frac{F_s}{F_k} \right)$$

$$\varnothing_1 = \frac{L_k}{\sqrt{2}D}, \quad \varnothing_2 = \frac{L_k}{\sqrt{2}D \left(1 + \eta \frac{L_k}{L_s} \right)}$$

$$\psi_1 = \frac{L_k}{DHd} \left[D - \frac{(D+d)\eta}{2 \left(\eta + 2 \frac{L_s}{L_k} \right)} \right]$$

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \frac{L_k}{DHd} \left[\frac{D+d}{\eta + \frac{L_g}{L_k}} \right], \quad \varnothing_1 = \frac{L_k}{D} \left[\frac{\eta}{2(\eta + 2\frac{L_s}{L_k})} \right] \\ \psi_2 &= \frac{L_k}{DHd} \left[D - \frac{(D+d)\eta}{2(\eta + 2\frac{L_s}{L_k})} - \frac{(D+d)}{2(\eta + 2\frac{L_s}{L_k})} \frac{4L_s}{L_k} \right] \\ \varnothing_2 &= \frac{L_k}{D} \left[\frac{1}{2(\eta + \frac{2L_s}{L_k})} \left(\eta + \frac{4L_s}{L_k} \right) \right], \\ \varnothing_3 &= \frac{L_s}{D(\eta + \frac{L_s}{L_k})}\end{aligned}$$

几何特征系数均取决于塔架的外形和尺寸，塔架的结构方案确定后，即可分别算出塔架每层的系数值。

五 小 结

带有柔性交叉斜杆的空间塔架，其内力计算步骤如下：

- (一) 计算每一层塔架的几何特征系数，并列成表格以便查用。
- (二) 把侧向荷载分为 w_1 和 w_2 二种：计算垂直荷载及侧向荷载沿塔高变化情况。
- (三) 把塔架分层编号作为计算单元，所有荷载均简化成 ΣP 、 M 、 Q 三种形式并且作用于每层节间上端。

(四) 逐层分别计算在 w_1 和 w_2 荷载情况下的甲、乙、丙三种可能受力情况时的塔架内力，然后选择具有正号(拉力)斜杆的内力及其相应塔柱内力即为此空间桁架的计算内力。

参 考 文 献

《塔桅钢结构设计》中国建筑工业出版社 1972年。