关于推广的Opial不等式*

数学系 赖万才

华罗庚[1]曾猜想下述定理成立，但未完成证明。

定理. 设 $y(x)$ 是〔0，a）上的一个绝对连续函数，适合 $y(0)=0$. 那末对任何 l，$0\leqslant l<\infty$，有

$$\int_0^a |y^l(x)y'(x)|dx\leqslant\frac{a^l}{l+1}\int_0^a |y'(x)|^{l+1}dx, \qquad (1)$$

这里当且仅当 $y=bx$，b 为常数时取等号.

创始于Opial[2]，后来为Olech[3]和Beesack[4]所引用的Opial不等式是当 $l=1$，$y(x)$ 在〔$0,a$〕上绝对连续且 $y(0)=0$ 时的（1）式. 它是无误的. 但其后Levinson[5]对Opial不等式给出新证以及华在〔1〕中和最近候明书在〔6〕中相继推广它时，把 $y(x)$ 在〔$0,a$〕上绝对连续的条件疏忽为 $y(x)$ 在（$0,a$）上绝对连续. 应该指出，这是不对的（见本文末了举出的反例），所以这里改正为 $y(x)$ 在〔$0,a$）上绝对连续.

华在文〔1〕的末了认为"把 l 变为任意正数，似乎也不很难". 但候在〔6〕中沿用华的原来方法对这个不等式作了进一步的探讨之后，认为要在 l 非正整数的情形下证明它"看来好象很困难".

华的证明方法确实难以应用于 l 非正整数的情形. 下面另用全变差函数的概念证明上述定理.

证. i）对于 $y(x)$ 是单调的情形. 先假定 $y(x)$ 在〔$0,a$）上是单调增加. 设 $0<\varepsilon<a$. 我们有

$$\int_0^{a-\varepsilon}|y^l(x)y'(x)|dx=\int_0^{a-\varepsilon}y^l(x)y'(x)dx=\frac{1}{l+1}y^{l+1}(a-\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{l+1}\left(\int_0^{a-\varepsilon}y'(x)dx\right)^{l+1}\leqslant\frac{(a-\varepsilon)^l}{l+1}\int_0^{a-\varepsilon}|y'(x)|^{l+1}dx,$$

（这里用了Hölder不等式）其中的不等式当且仅当在〔$0,a-\varepsilon$〕上 $y=bx$、b 为常数时取等号. 由于 ε 的任意性，即得（1）式.

当 $y(x)$ 在〔$0,a$）上是单调减少时，用 $-y(x)$ 代替 $y(x)$ 得到同上结论.

---

* 本文曾于1979年投《科学通报》，编辑部于4月20日收到，由于4月19日收到了杭州大学王斯雷同志的同一论题的文章，因此尽管编辑部认为本文方法"与众不同"亦不便选用。

ii）对于$y(x)$是非单调的情形．我们在〔0，a）上定义

$$\widetilde{y}(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \sup\limits_{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=x} \left\{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|y(x_{k+1})-y(x_k)|\right\}, & x\in(0,a).\end{cases}$$

即$\widetilde{y}(x)$是$y(x)$在〔0，x〕上的全变差．由实函数论的知识知道$\widetilde{y}(x)$在〔0，a）上是单调增加的绝对连续函数，$\widetilde{y}(0)=0$，

$$|y(x)|\leqslant\widetilde{y}(x), \tag{2}$$

并且存在c，$0<c<a$，当$x\in(c,a)$时，（2）中等号不成立．

又由实函数论的知识知道$\widetilde{y}(x)=\int_0^x|y'(t)|dt$，故在〔0，a）上几乎到处成立

$$|y'(x)|=\widetilde{y}'(x).$$

于是应用已证明的 i），我们有

$$\int_0^a|y^l(x)y'(x)|dx<\int_0^a\widetilde{y}^l(x)\widetilde{y}'(x)dx\leqslant\frac{a^l}{l+1}\int_0^a\widetilde{y}'(x)^{l+1}dx$$

$$=\frac{a^l}{l+1}\int_0^a|y'(x)|^{l+1}dx. \tag{3}$$

（3）是严格的不等式．

综合上述，定理证毕．

函数

$$y(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ a+x, & x\in(0,a),\end{cases}$$

满足

$$\int_0^a|y^l(x)y'(x)|dx=\frac{(2a)^{l+1}-a^{l+1}}{l+1}>\frac{a^{l+1}}{l+1}=\frac{a^l}{l+1}\int_0^a|y'(x)|^{l+1}dx,$$

这说明定理中的条件不能易为“$y(x)$是（0，a）上的一个绝对连续函数，适合$y(0)=0$．”

参考文献

〔1〕华罗庚，科学通报，（1965），3：251．

〔2〕Opial Z.，Ann. Polon. Math.，8（1960），29—32．

〔3〕Olech C.，Ann. Polon. Math.，8（1960），61—63．

〔4〕Beesack P. R.，Trans. Amer. Math. Soc.，104（1962），470-75．

〔5〕Levinson N.，Proc. Amer. Math. Soc.，15（1964），565-66．

〔6〕侯明书，科学通报，（1979），6：247-48．