Walsh函数在波形综合中的应用

电脑系　陈玉宝

提　要

本文旨在简叙Walsh函数的基本定义、性质和Walsh级数及在Walsh变换的基础上，研究了一种新颖的、利用Walsh级数展开的波形综合方法，并给出了实现Walsh函数及Walsh变换的物理模型和实际逻辑电路框图。最后尚探讨了Walsh函数在现代控制理论中的应用。

一、引　言

美国著名数学家J.L. Walsh早在一九二三年提出的正交函数，最近几年来在电子领域中得到了高度的重视和应用[1]，并在不少的学科里显示了它的巨大潜力和吸引力。从近年来在Walsh函数及应用的国际性会议上所发表的大量论著上看，科学家们对Walsh函数应用的重要性及广阔前景的认识已有一致的见解。详细且深入地讨论这个令人兴趣的课题已不是本文的主题，故本文仅扼要地介绍有关Walsh函数的定义、性质及Walsh级数、Walsh变换，着重讨论它的实现模型及在波形合成中的应用。有关Walsh函数的详细内容请参阅〔2〕。

二、Walsh函数的定义及其性质

2.1，Walsh函数的定义

Walsh函数系为一种归一化的完备正交函数系。它有数种的表示方法和排列次序，并且它们之间是可以某种方式互换的[4]。在此，我们引入了一种用C. Cardot方式表示的Walsh函数定义式。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Wal}(k,t)=\prod_{y=0}^{m-1}\mathrm{Sgn}(\cos k_y 2^y\pi t) && 0\leqslant t<T=1 \\
&\mathrm{Wal}(k,t)=\mathrm{Wal}(k,t+n) && n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots \qquad (1)\\
&k=\sum_{y=0}^{m-1}k_y 2^y && k_y=\{0,1\}
\end{aligned}$$

k称为Walsh函数的编号，m是k的二进制表示中的位数，sgn是符号函数，即

$$\mathrm{Sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0;\end{cases}$$

根据定义式〔1〕，我们就可以描述出Walsh函数的图形及表达式(1)。如将定义式〔1〕开拓到整个t实轴上，则当k为奇数时，Wal(k,t)对于原点是奇函数，当k为偶数时，

Wal (k,t) 对于原点是偶函数；类似于正、余弦函数表示法，我们也可用正弦 Walsh 函数 Sal (i,t) 和余弦 Walsh 函数 Cal (i,t) 表达奇、偶 Walsh 函数，于是：

$$\mathrm{Wal}(k,t)=\begin{cases}\mathrm{Sal}(i,t) & 当k=2i-1,\quad i=1,2,\cdots\cdots n\\ \mathrm{Cal}(i,t) & 当k=2i,\quad i=0,1,2,\cdots\cdots n\end{cases} \qquad (2)$$

2.2 Walsh 函数的若干性质

1．乘法公式：$\mathrm{Wal}(n,t)\,\mathrm{Wal}(m,t)=\mathrm{Wal}(n\oplus m,t)$；这个性质表明，二个 Walsh 函数的积仍是 Walsh 函数，其结果是模二和。

2．符号变更的次数：Walsh函数 Wal (k,t) 在区间 $\{0\leqslant t\leqslant 1\}$ 里变号的次数恰好等于 k。从这个性质出发，定义了一种广义频率—列率，其单位是〔Hm〕[1]。列率恰好是 Walsh 函数在单位时间间隔内通过零点次数之半，因此 Walsh 函数的一般表达式可写作：$A\mathrm{Cal}(\phi T,(t+t_0)/T)$；它有四个参量：振幅 A、列率 ϕ，时运 t_0 和时基 T。时基 T 则是 Walsh 函数所特有的。

3．规范正交性：Wal (k,t) 在 $0\leqslant t<1$ 上是一规范正交函数系，它满足实值连续函数的集合 $\{\mathrm{Wal}(k,t)\}=\{\mathrm{Wal}(0,t),\ \mathrm{Wal}(1,t)\cdots\cdots\}$ 在〔0,1〕区间上正交的条件，即 $\int_0^1 \mathrm{Wal}(k,t)\cdot \mathrm{Wal}(h,t)\,dt=\begin{cases}1 & 当k=h\\ 0 & 当k\neq h\end{cases}$

4．奇偶性：$\mathrm{Wal}(k,1-x)=(-1)^k\mathrm{Wal}(k,x)$，当 k 为偶数时，Wal (k,t) 对于点 $t=\frac{1}{2}$ 为偶对称，当 k 为奇数时，Wal (k,t) 对于点 $t=\frac{1}{2}$ 为奇对称。

Walsh 函数尚具有其它一些性质，如 Walsh 函数的压缩性等，在此不一一列举了。

三、Walsh 级数及 Walsh 变换

3.1 Walsh 级数的展开：

任一满足 Dirichlet 条件的周期函数 f (t)，展开成 Walsh—Fourier 级数为：

$$f(t)=a_0\mathrm{Wal}(0,t)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{Wal}(n,t) \qquad (3)$$

其中：
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Wal}(0,t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$
$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Wal}(n,t)\,dt \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

在定义域里，$t'<\frac{t}{T}$，$0\leqslant t'<1$，可类似于 Fourier 级数将其展开为：

$$f(t)=a_0\mathrm{Wal}(0,t)+\sum_{i,j=1}^{\infty}\left[a_i\mathrm{cal}(i,t)+b_j\mathrm{sal}(j,t)\right] \qquad (4)$$

其中：
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Wal}(0,t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$
$$a_i=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Cal}(i,t)\,dt \qquad i=(2,4,\cdots\cdots 2N)$$
$$b_j=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Sal}(j,t)\,dt \qquad j=(1,3,\cdots\cdots 2N-1)$$

它与Fourier级数之间存在有这样的关系：

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Cal}(i,t)=\frac{a_{0i}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k^i\cos k\omega_0 t+b_k^i\sin k\omega_0 t\right]\\
&\mathrm{Sal}(j,t)=\frac{a_0^j}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k^j\cos k\omega_0 t+b_k^j\sin k\omega_0 t\right]\\
&f(t)=a_0\mathrm{Cal}(0,t)+\sum_{i,j=1}^{\infty}\left\{a_i\left[\frac{a_0^i}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^i\cos k\omega_0 t+b_k^i\sin k\omega_0 t)\right]+\right.\\
&\qquad\left.b_j\left[\frac{a_0^j}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^j\cos k\omega_0 t+b_k^j\sin k\omega_0 t)\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{wal}(n,t)$ 收敛于函数f(x)的话，则具有下述意义：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[f(t)-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{wal}(n,t)\right]^2dt=0 \qquad (6)$$

3.2 Walsh 变换及反变换

如果函数f(t)在非负实数的集合{R+}中是可积的，即满足在条件 $\int_a^b f(x)dx<+\infty$ 的所有Lebegue可积函数的全体L空间中是完备的，有 $f(x)\in L(R+)$，且f(t)的Walsh－Fourier级数在t＝x处收敛于f(x)，则：

$$f(x)=\lim_{w\to\infty}\int_0^w f(t)\int_0^w\phi_Y(x\oplus t)dydt=\lim_{w\to\infty}\int_0^w\phi_Y(x)\int_0^w\phi_Y(t)f(t)dtdy \qquad (7)$$

如果令：$f^{\#}(t)=\int_0^w\phi_Y(t)f(t)dt$ (8)

将式(8)代入式(7)得：

$$f(t)=\lim_{w\to\infty}\int_0^w f^{\#}(t)\phi_Y(x)dy=\int_0^{\infty}f^{\#}(t)_Y\phi(x)dy \qquad (9)$$

式(8)和式(9)构成了Walsh－Fourier变换对。

四、Walsh 函数及 Walsh 级数的实现模型

本节将研究实现Walsh函数及Walsh级数数学模型的物理模型，並给出某些具体逻辑结构图。

4.1 Walsh 函数发生器

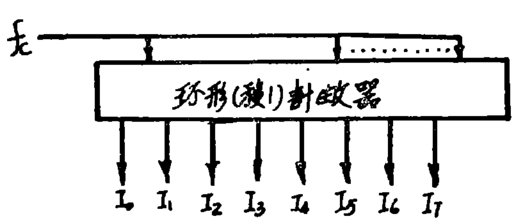
根据Rademacher函数的乘积可以构成Walsh函数的原理[4]，用开关电路产生一组Rademaeher函数，再利用一些逻辑电路产生一组Walsh函数，这种方法为大多数设计师所采用，并有相当多的文献提及它[2]，[4]。故在本文中不讨论这种方法，而着重介绍一种用单位脉冲发生器驱动的Walsh函数发生器。

这一方法的原理是利用环形计数器产生各种序号的单位脉冲（图1），在此我们设为正逻辑，即高电位为1，低电位为0尔后依Walsh函数的序号进行逻辑组合，以形成各种序

号的 Walsh 函数（图2）。对于前八个 Walsh 函数的组合逻辑表达式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&Wal(0,t)=1\\
&Wal(1,t)=I_0+I_1+I_2+I_3=\overline{I_4}\cdot\overline{I_5}\cdot\overline{I_6}\cdot\overline{I_7}\\
&Wal(2,t)=I_0+I_1+I_6+I_7=\overline{I_2}\cdot\overline{I_3}\cdot\overline{I_4}\cdot\overline{I_5}\\
&Wal(3,t)=I_0+I_1+I_4+I_5=\overline{I_2}\cdot\overline{I_3}\cdot\overline{I_6}\cdot\overline{I_7}\\
&Wal(4,t)=I_0+I_3+I_4+I_7=\overline{I_1}\cdot\overline{I_2}\cdot\overline{I_5}\cdot\overline{I_6}\\
&Wal(5,t)=I_1+I_3+I_5+I_6=\overline{I_1}\cdot\overline{I_2}\cdot\overline{I_4}\cdot\overline{I_7}\\
&Wal(6,t)=I_0+I_2+I_5+I_7=\overline{I_1}\cdot\overline{I_3}\cdot\overline{I_4}\cdot\overline{I_6}\\
&Wal(7,t)=I_0+I_2+I_4+I_6=\overline{I_1}\cdot\overline{I_3}\cdot\overline{I_5}\cdot\overline{I_7}
\end{aligned}\right\}\qquad(10)
$$

另则，对于更多序号的 Walsh 函数，我们仍可用更多级的环形计数器（或移1计数器）去产生更多的单位脉冲，並用二极管矩阵去产生更多序号的 Walsh 函数的逻辑组合，其结构图示于图3。



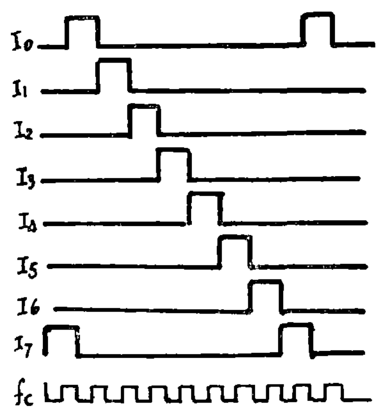


图1. 环形计数器及其波形

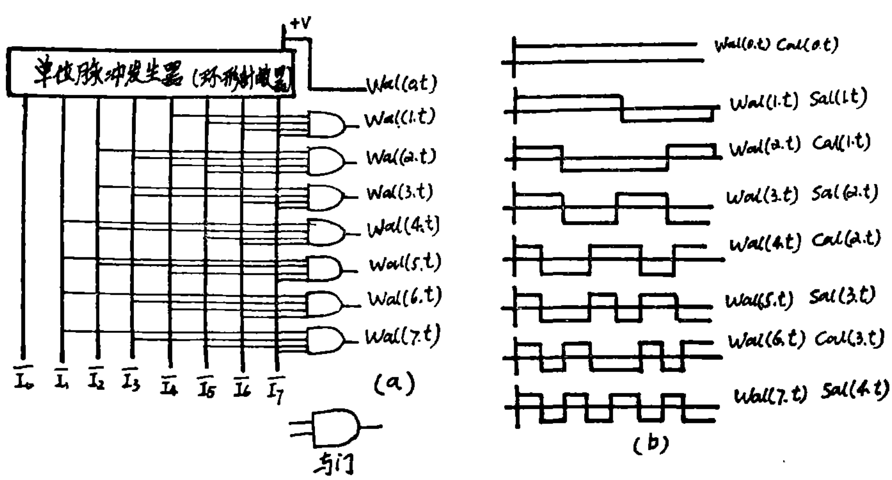


图2. 前八个 Walsh 函数发生器及波形图

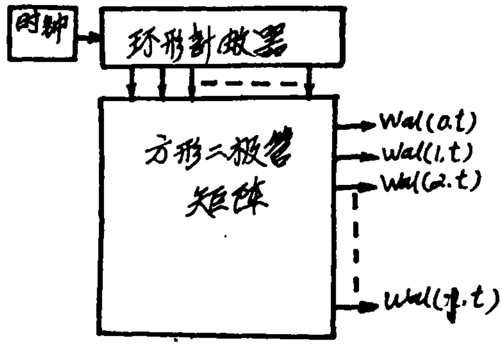


图3．用环形计数器及二极管矩阵实现八个序号的 Walsh 函数

4.2 Walsh 级数的实现模型

从式(3)中可知，任一函数 f(t) 可展开为 Walsh 级数，则 f(t) 可表示为各种序号的 Walsh 函数的线性组合，$f_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{in}\,\mathrm{wal}(n,t)$。对 $f_i(t)$ 作出近似逼近，则 n 应取足够大，使其近似程度对全体 i 可容，在这种情况下，可令其线性组合为：

$a_{in}=A,\quad \mathrm{Wal}(n,t)=(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots\phi_{m-1})$

$$f_i(t)=\sum F_i=(F_0+F_1+\cdots\cdots F_k) \tag{11}$$

当 $f_i(t)$ 的线性组合按 $i=1,2,\cdots\cdots k$ 和 $n=0,1,\cdots\cdots m_{-1}$。全部展开时，线性变换的一般形式为 $F=A\times\phi$。

若实现式(3)数学模型的 Walsh 系数矩阵 A 为：

$$A=\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1m-1} \\ a_{20} & a_{20} & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots a_{2m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3}\cdots\cdots a_{km-1} \end{vmatrix}$$

则图4为式(3)实现的物理模型。从图4的结构图中可以看出，实现函数 f(x) 的 Walsh 级数展开的基本过程为：用逻辑电路构成 Walsh 函数发生器，产生所需要的 Walsh 函数，在控制单元的控制下，把得到的 Walsh 函数按系数进行加权组合，其输出经求和电路后，在求和电路输出端便可得到所需函数 f(t) 的逼近输出。

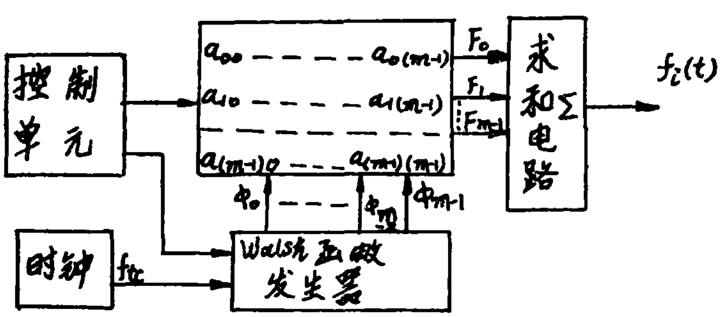


图4．实现 Walsh 级数展开逼近 f(t) 的物理模型结构图

4.3 若干波形的合成

1．三角波：设 f(t)以 T＝1 为周期，且

$$f(t)=\begin{cases}2t & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 2(1-t) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

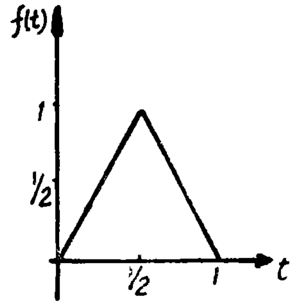


图5．三角波

根据奇偶函数的性质有 $b_i=0$，而 a_i 是：

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\mathrm{Cal}(0,t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}2t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-t)\,dt=\frac{1}{2}\\
a_1&=\frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\mathrm{Cal}(1,t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}2t\,\mathrm{cal}(1,t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-t)\mathrm{cal}(1,t)\,dt=-\frac{1}{4}\\
a_2&=\frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\mathrm{Cal}(2,t)\,dt=0\\
a_3&=\frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\mathrm{Cal}(3,t)\,dt=-\frac{1}{8}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

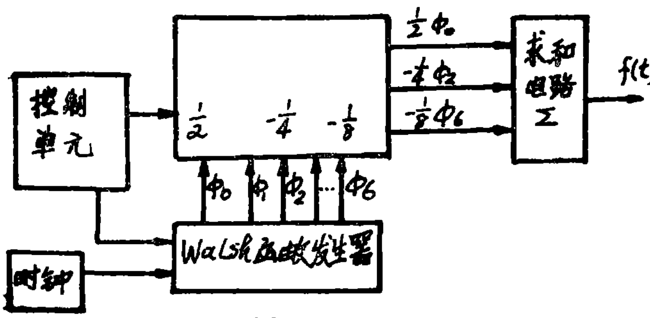
于是得到了 f(t) 的 Walsh 级数展开式为：

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{Cal}(1,t)-\frac{1}{8}\mathrm{Cal}(3,t)+\cdots\cdots\qquad(13)$$

取展开式的前三项，则得近似式为：

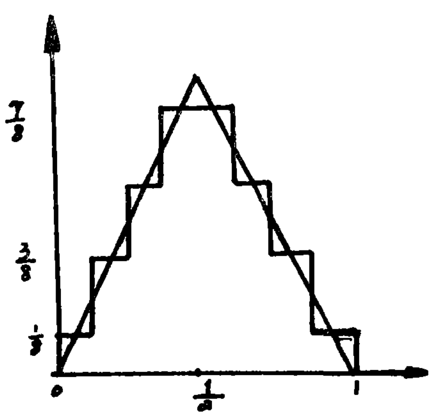
$$f(t)\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{Cal}(1,t)-\frac{1}{8}\mathrm{Cal}(3,t)\qquad(14)$$

它的实现模型如图6结构图所示。



(a)

图6 三角波逼近实现的结构式



(b)

2．周期性方波；设其周期为1且：

$$f(t)=\begin{cases}C & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ -C & \frac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$$

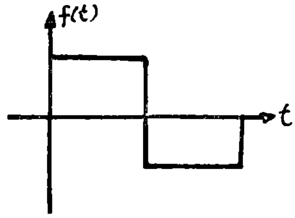


图7 周期方波

其中C为常数；

由 Walsh 级数展开式有：

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\,Wal(0,t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}C\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 C\,dt=0\\ a_1&=\frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\,Wal(1,t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}C\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 C(-1)\,dt=C\\ a_2&=a_3=\cdots\cdots a_n=0\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

于是：$f(t)=Wal(1,t)$。根据图4的结构及图6的例子不难画出其实现结构图，限于篇幅，从此开始均不再描出其逼近实现的结构图。

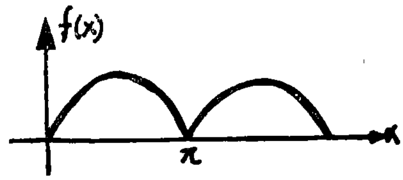


图8 $f(x)=\mathrm{Sin}\,\pi x$图

3．全波整流的波形：设 f(t) 以π为周期且：

$f(x)=\mathrm{Sin}\,\pi x$，$0\leqslant x<1$

由 Walsh 级数展开得：

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{Sin}\pi x\,Wal(0,x)\,dx=\frac{2}{\pi}\\ a_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{Sin}\pi x\,Wal(1,x)\,dx=0\\ a_2&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{Sin}\pi x\,Wal(2,x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{Sin}\pi x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}}\mathrm{Sin}\pi x\,dx\\ &\quad-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}}\mathrm{Sin}\pi x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{3}{4}}^1\mathrm{Sin}\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2})\\ a_3&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{Sin}\pi x\,Wal(3,x)\,dx=0\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

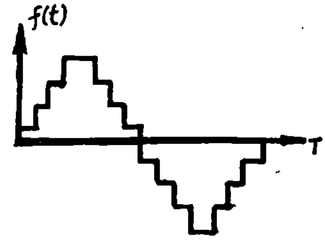
于是得到了 f(x) 的 Walsh 级数展开式：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}Wal(0,x)+\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2})\,Wal(2,x)+\cdots\cdots\qquad(17)$$

同理，我们亦可导出简单正弦波的 Walsh－Fourier 级数展开式：

$f(t)=\mathrm{Sin}2\pi t\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

$$\left.\begin{aligned}&f(t)=a_1Wal(1,t)+a_5Wal(5,t)+a_{13}Wal(13,t)+\cdots\cdots\\ &\text{其中：}a_1=\int_0^1\mathrm{Sin}2\pi t\,Wal(1,t)\,dt\\ &\qquad a_5=\int_0^1\mathrm{Sin}2\pi t\,Wal(5,t)\,dt\\ &\qquad a_{13}=\int_0^1\mathrm{Sin}2\pi t\,Wal(13,t)\,dt\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$



9. f(t) = Sin2πt的逼近图

上述的那些波形合成，均是在电子学领域中常见和频用的，我们藉助于这种方法，可很方便地进行一些波形的产生及合成。另则：将式(3)中的 a_k 项作下述近似：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Wal}(k,t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} N_{nt}\,\mathrm{Wal}(k,t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T-1 \tag{19}$$

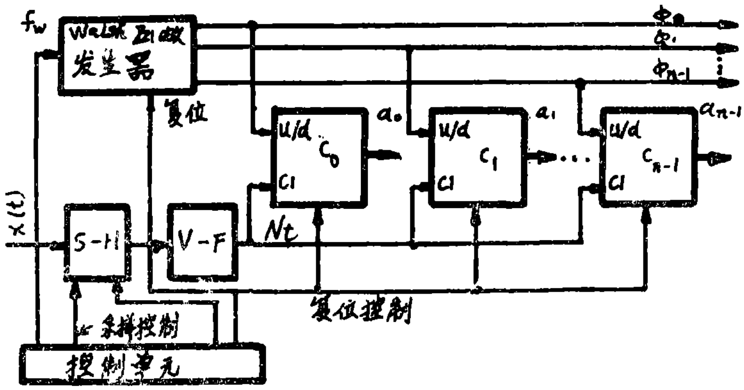


图10. 数字 Walsh 函数分析仪结构图

据此便可构成 Walsh 函数数字分析仪，它的主要作用是将连续函数的信号转换为二进制的 Walsh 函数系数。它的基本原理结构图示于图10。它的工作过程大致是：把随机变量函数 x(t) 经采样保持电路单元（S－H）后，由电压—频率变换器（V－F）将其转为频率脉冲 Nt 作为每个计数器时钟通道的输入，並将 Walsh 函数发生器的输出 $\phi_0, \phi_1, \cdots\cdots \phi_{n-1}$，接到相应的计数器加减控制端，控制计数器对 V－F 变换器送入的频率脉冲作加减运算，当 $\phi_k = 1$ 时，作加法，当 $\phi_k = -1$ 时，作减法。于是在每个归一化的时间周期里，计数器的内容 C_k 就是 Walsh 函数的系数。这就完成了函数 X(t) 的二进制的 Walsh 系数的转换。它可供过程控制及信号处理等用。控制单元对整个网络提供控制信号，其中有计数器及 Walsh 函数发生器的起动及复位控制；当计数器溢出时，关闭 Walsh 函数发生器及计数器。并对采样周期提供控制，由复位控制命令启动采样周期、Walsh 函数发生器及计数器同步动作。这种变换在电子控制系统分析中的重要性是众所周知的，故本文不多赘述。

五、Walsh 级数在现代控制论中的应用

我们将在此节中探讨 Walsh 级数在现代控制论中应用的方法，这种方法是全新的，并且易于用计算机实现。

我们考虑下述线性系统，它可用n阶微分方程式描述的形式，即：

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}X^2 + a_nX = b_0u^n + b_1u^{n-1} + \cdots\cdots b_{n-1}u^2 + b_nu \qquad (20)$$

其中：a_i, b_j均为常数，$i, 0 = 1, 2, \cdots\cdots n$

$j = 0, 1, 2, \cdots\cdots n$

考虑一个简单情况，强追函数中不包括输入的导数项，即：$b_0 = b_1 = \cdots\cdots b_{n-1} = 0$，$b_n \neq 0$；则方程式(20)变为：$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots\cdots a_{n-1}X^2 + a_nX = b_nu$ (21)

通过变换整理后可描述为：

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \qquad (22)$$

其中：

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots b_{2L} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots\cdots b_{nL} \end{pmatrix}$$

那么，我们可以用 Walsh 级数对其进行求解，首先，用系数是 $n \times m$ 的 m 项 Walsh 级数去逼近确定$\dot{X}$，令：

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{10} & C_{11} \cdots\cdots C_{1(m-1)} \\ C_{20} & C_{21} \cdots\cdots C_{2(m-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_{n0} & C_{n1} \cdots\cdots C_{n(m-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{m-1} \end{pmatrix} \qquad (23a)$$

或简记为：

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \Phi \triangleq \mathbf{C}_{(n \times m)} \times \Phi_{(m \times 1)} \qquad (23a)$$

值得指出的是：解此微分方程与常规方法不太一样，因为我们所采用的状态变量$\dot{X}$是未确定的向量级数。状态变量X可由积分求得：

$$X(t) = C\int_0^t \phi(\lambda)\,d\lambda + X_0 \qquad (24)$$

上述积分亦可由P矩阵近似逼近，即：

$$\int_1^t \phi(\lambda)d\lambda \triangleq P\phi(t), \quad \text{则} X(t)=C\int_1^t \phi(\lambda)d\lambda + X_0 \triangleq CP\phi(t)+X_0 \tag{25}$$

输入向量亦可用Walsh级数表达：

$$U=\begin{pmatrix} h_{10} & h_{11}\cdots\cdots h_{1(m-1)} \\ h_{20} & h_{21}\cdots\cdots h_{2(m-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{L1} & h_{L1}\cdots\cdots h_{L(m-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{m-1} \end{pmatrix} \triangleq H\Phi \tag{26}$$

式中H是常数矩阵。将式(23)、(25)、(26)代入式(22)得：

$$\dot{X}=AX+BU=C\Phi=A\{CP\Phi+X_0\}+BH\Phi \tag{27}$$

$$X(o)=X_0$$

我们将AX_0也统一写成向量形式：

$$AX_0=AX_0\Phi_0 = [AX_0,\underbrace{000\cdots\cdots0}_{m-1}]\Phi=G\Phi \tag{28}$$

化简式(27)得：

$$\left.\begin{array}{l} C\Phi=ACP\Phi+G\Phi B+H\Phi \\ C=ACP+G+BH \end{array}\right\} \tag{29}$$

令　$K=G+BH$　并代入式(29)

$$C=ACP+K \tag{30}$$

那它可描述为：

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = [P'\otimes A]\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

其中$P'\otimes A$是矩阵Kronecher积，它的定义式是：

$$P'\otimes A=\begin{pmatrix} a_{11}p' & a_{12}p'\cdots\cdots a_{1n}p' \\ a_{21}p' & a_{22}p'\cdots\cdots a_{2n}p' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}p' & a_{n2}p'\cdots\cdots a_{nn}p' \end{pmatrix} \tag{32}$$

如果$[I-P'\otimes A]^{-1}$存在的话，则式(31)可整理为：

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = [I-P'\otimes A]^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \tag{33}$$

由式(33)求到C后，我们可建立求状态变量向量的方程；

$$X = CP\Phi(t) + X_0 \tag{34}$$

因此，任一定常高阶微分方程总可由状态方程描述，而状态方程通过式(33)、(34)可用Walsh 级数进行求解。

六、结　束　语

由于 Walsh 函数本身的二值特性与数字电路特性相协调，故其近期来在电子领域中得于越来越迅猛的发展。目前，不少科学家正在致力于探讨和开拓它应用的“处女界”，鉴于Walsh 函数的应用是一个内容广泛并具有极大潜力的课题，本文仅研究了其中的一小部份，有关 Walsh 函数本身的进展及在其它领域中的应用我们均无涉及，并在文中可能存在着一定的缺点，但作者愿乐观地指出：随着科技的进展，Walsh 函数必将在许多领域的应用中结出丰硕之果。

本文在写作过程中，得到我系肖金炳同志的帮助和进行有益地讨论，又承蒙康赐荣老师仔细校阅本文底稿，现谨向他们一並致予衷心地感谢！

参　考　文　献

1．樊昌信“沃尔什函数应用研究之进展”《西北电讯工程学院学报》 1977．3—4合刊 $P_8 \sim P_{33}$

2．南京工学院：“线性离散变换与线性系统”（讲 义） 1978．7．

3．G. Frangakis, S. Tzafestas “A digital walsh function analyser” 《Electronic Enginecring》 Vcl. 51. №925 July 1979.

4．常迥：“有关沃尔什函数应用的几个问题”《清华大学学报》 1978．1． $P_{68} \sim P_{81}$

5．Wen-Liang Chen and yen-ping shih; “Analysis and optimal COntrOL of time-varying linear Systems Via Walsh function” (INT. J. CONTROL) 1978. VoL. 27. №6. 917—932