一种新的单变量选优方法*

数学系 赖万才

提　要

本文对《电子工业技术动态》一九七二年第三期上发表的华罗庚的手稿里提出的一个优选法问题提供了解答。所得结果使分数法和黄金分刈法成了我们的新方法的一个特例。

（一）

在上述的华罗庚的手稿里，研究这样的问题：在区间〔0,1〕上的 x_0 处已做过一次试验，何利用这次试验的结果合理地安排以后的试验？

华罗庚的处理是：置 $\omega=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618\cdots$。分三种情况来讨论：

1）$0<x_0<\omega^2$，

2）$\omega^2<x_0<\omega$，

3）$\omega<x_0<1$。

由于1）、3）是对称的，只要讨论其一就够了。

以3）为例。在 ωx_0 处做一次试验。如果 ωx_0 是最优的已试点#，则最优的已试点处于留区间的黄金分刈点，用黄金分刈法做下去；如果 x_0 是最优的已试点，则去掉的区间是〔0,〕，其长度大于 ω^2 还不坏，以下又变为在 $(\omega x_0,1〕$ 上的 x_0 处已做过一次试验的问题了。

再讨论2），在 $\frac{x_0}{\omega}$ 处做一次试验。如果 $\frac{x_0}{\omega}$ 是最优的已试点，则去掉的区间是〔$0,x_0$〕，度大于 ω^2 还不坏，以下又变为在（x_0，1〕上的 $\frac{x_0}{\omega}$ 处已做过一次试验的问题了；如果最优的已试点，则最优的已试点处于留下区间〔$0,\frac{x_0}{\omega}$）的黄金分刈点，用黄金分刈法去。

最后他提出这样的问题：对 2）的情况，该不该分 $x_0\gtrless\frac{1}{2}$ 来研究？以上的处理能不能改

我们的回答是：对 1）和 3）的情况，在不预定试验次数下，是不能改进了。对 2）的可以改进，而且应该分 $x_0\gtrless\frac{1}{2}$ 来研究。当 $\frac{1}{2}<x_0<\omega$ 时，2）的情况象3）一样，在不

---

* 这种方法我们曾经简单地叙述在〔1〕中而没有论及它的最优性和给出证明。

\# 为了方便，在只有两个已试点的情形，我们亦称较优的已试点为最优的已试点。

预定试验次数下，于ωx_0处做一次试验．就是说，最优试验点的安排不必分成1）、2）、3）来讨论，只要分成$0<x_0<\frac{1}{2}$和$\frac{1}{2}<x_0<1$两种情况来讨论就够了．关于这些，我们将在后面给出明确的叙述和证明．所得结果可总结成下述的选优方法：

A）如果在〔0，1〕上的x_0处已做过一次试验，预定再做$n-1$次试验，那么再做的第一次试验安排在〔0,1〕被x_0所分的较长一段的$n-1$次试验的分数法的头两个试验点中靠近x_0的那一点**，而以后把每一次的留下区间比作〔0,1〕，最优的已试点比作x_0***，关于余下试验次数作如上的类似处理，直至余下试验次数完了为止，是在〔0,1〕上的x_0处已做过一次试验，预定再做$n-1$次试验的一个最优策略．特别，当x_0是〔0,1〕上的n次试验的分数法的头两个试验点之一时，这个新的最优策略就是〔0,1〕上的n次试验的分数法．

B）如果在〔0,1〕上的x_0处已做过一次试验，若不预定试验次数，那末再做的第一次试验安排在〔0,1〕被x_0所分的较长一段的两个黄金分划点中靠近x_0的那一点，而以后把每一次的留下区间比作〔0,1〕，最优的已试点比作x_0，作如上的类似处理，是在〔0,1〕上的x_0处已做过一次试验，当不预定试验次数时的一个最优策略．特别，当x_0是〔0,1〕上的两个黄金分划点之一时，这个新的最优策略就是〔0,1〕上的黄金分划法．

（二）

不失一般性，讨论求目标函数的最大值的情形．

所谓$f(x)$在区间〔0,1〕上为一单峰函数，是指：$f(x)$在〔0,1〕上的某点x^*（称为最优点）取最大值，且在〔$0,x^*$）上严格增加，而在（$x^*,1$〕上严格减少．

对于〔0,1〕上的任一单峰函数$f(x)$和任意给定的s个点$x_1,x_2,\cdots,x_s$．我们定义$\triangle(x_1,x_2,\cdots,x_s;f)$如下：

对$f(x)$而言，当$x_1,x_2,\cdots,x_s$中的极大点有两个时，$\triangle(x_1,x_2,\cdots,x_s;f)$表示以这两个极大点为端点的开区间；当$x_1,x_2,\cdots,x_s$中的极大点唯一时****，$\triangle(x_1,x_2,\cdots,x_s;f)$表示〔0,1〕上包含该极大点而不包含其余$s-1$个点中的任一点的最大区间．

本文限于讨论每次只做一个试验的情形．

所谓给定了一个试验策略φ，就是给定了一列映照$\{\varphi_i\}$：φ_i（$i=1,2,3,\cdots$）对于〔0,1〕上带有至多一个例外点的任意区间有定义，且把每一个这样的区间映成自身（保持例外点和端点不动）带上另一个例外点，φ与〔0,1〕、$f(x)$有如下的结合：

φ_1把〔0,1〕映成自身带上一个例外点x_1，在x_1上做第一次试验．把带上例外点（唯一的已试点）x_1的$\triangle(x_1;f)$（$=$〔0,1〕）称为f在φ下做了第一次试验后的留下区间，记作$\triangle_1(\varphi,f)$．

φ_2把$\triangle_1(\varphi,f)$映成自身带上另一个例外点x_2，在x_2上做第二次试验．比较在x_1,x_2上的试验结果（$f(x)$的函数值）．把带上至多一个例外点（最优的已试点）的$\triangle(x_1,x_2;f)$称为f在φ下做了第二次试验后的留下区间，记作$\triangle_2(\varphi,f)$．

**当被分成两段一样长时，可任取其中一段当作较长的一段．

***当最优的已试点有两个时，可任取其中一点当作x_0．

****把$s=1$的情形也算作$x_1,x_2,\cdots,x_s$中的极大点唯一．

依次对于 $i=3,4,5,\cdots$. φ_i把$\triangle_{i-1}(\varphi,f)$映成自身带上另一个例外点$x_i$，在$x_i$上做第i次试验。比较在$x_1,x_2,\cdots,x_i$上的试验结果。把带上至多一个例外点（最优的已试点）的$\triangle(x_1,x_2,\cdots x_i;f)$称为f在$\varphi$下做了第i次试验后的留下区间，记作$\triangle_i(\varphi,f)$。

我们把$\triangle_i(\varphi,f)$上的一个其内部不包含已试点的最大开区间称为$\triangle_i(\varphi,f)$的一个核。它的长度记为$d_i(\varphi,f)$，把$\triangle_i(\varphi,f)$之长减去$d_i(\varphi,f)$记作$\theta_i(\varphi,f)$。

我们称$d_i(\varphi)=\sup\limits_f d_i(\varphi,f)$为$\varphi$在第i次试验后的精度。

对于试验策略φ和ψ，若成立$d_i(\varphi)\leqslant d_i(\psi)$，则说$\varphi$在第i步不劣于$\psi$；若成立$d_i(\varphi)<d_i(\psi)$，则说$\varphi$在第i步优于$\psi$；若成立$d_i(\varphi)=d_i(\psi)$，则说$\varphi$和$\psi$在第i步等价。若成立$d_i(\varphi)\equiv d_i(\psi)$，则说$\varphi$和$\psi$完全等价。

把第一次试验安排在x_0的试验策略φ记为φ_{x_0}。

若试验策略$\tilde{\varphi}_{x_0}$在第i步不劣于任一试验策略φ_{x_0}，则说$\tilde{\varphi}_{x_0}$在第i步是最优的。

若试验策略$\tilde{\varphi}_{x_0}$对于任一试验策略φ_{x_0}，或者第i步$\tilde{\varphi}_{x_0}$不劣于φ_{x_0}，否则第i+1步$\tilde{\varphi}_{x_0}$必优于φ_{x_0}，则说$\tilde{\varphi}_{x_0}$在第i步是滑动最优的。

所谓$\tilde{\varphi}_{x_0}$为一n次试验的最优策略，即$\tilde{\varphi}_{x_0}$在第n步是最优的。

所谓$\tilde{\varphi}_{x_0}$为一不预定试验次数的最优策略，是指：$\tilde{\varphi}_{x_0}$在每一步都是滑动最优的*****。

（三）

我们有下面的

引理1．设$\varphi_{x_0}^*$为一在〔0,1〕上把第一次试验安排在x_0，而以后按照（一）中B)那样安排任一次试验的试验策略，那末

$$d_i(\varphi_{x_0}^*)=\begin{cases}\omega^{i-1}x_0, & \omega\leqslant x_0\leqslant 1,\\ \omega^{i-2}(1-x_0), & \frac{1}{2}\leqslant x_0<\omega,\\ \omega^{i-2}x_0, & \omega^2<x_0<\frac{1}{2},\\ \omega^{i-1}(1-x_0), & 0\leqslant x_0\leqslant\omega^2,\end{cases}\qquad(1)$$

其中$i=2,3,4,\cdots$, $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618\cdots$.

证．由对称性知道，只要对$\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 1$的情形来证明就够了。

对于任一单峰函数f，用D_{i1}代表第i次试验后有唯一的最优的已试点$\neq x_0$；用D_{i2}代表第i次试验后有唯一的最优的已试点x_0；用D_{i3}代表第i次试验后有两个最优的已试点。对于$i=2,3,4,\cdots$，由记号的定义知道

*****我们是在认真地考虑了洪加威〔2〕的“黄金分划法在无穷远处是最优的！”概念之后决定引入这个最优性概念的。

$$d_i(\varphi_{X_0}^*, f)=\begin{cases}\omega d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f)，当出现 D_{i1} 时，\\ \max\{\omega^2 d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f),\ \theta_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f)\}，当出现 D_{i2} 时，\\ \omega^2 d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f)，当出现 D_{i3} 时，\end{cases} \tag{2}$$

$$\theta_i(\varphi_{X_0}^*, f)=\begin{cases}\omega^2 d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f)，当出现 D_{i1} 时，\\ \min\{\omega^2 d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f),\ \theta_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f)\}，当出现 D_{i2} 时，\\ 0，当出现 D_{i3} 时，\end{cases} \tag{3}$$

此地$d_1(\varphi_{X_0}^*, f)=x_0$，$\theta_1(\varphi_{X_0}^*, f)=1-x_0$。

由（2）和（3）得

$$d_i(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\max\{\omega d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f),\ \theta_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f)\}, \tag{4}$$

和

$$\theta_i(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^2 d_{i-1}(\varphi_{X_0}^*, f). \tag{5}$$

当$\omega\leqslant x_0\leqslant 1$时，有$1-x_0\leqslant\frac{x_0}{\omega}-x_0=\omega x_0$，由（4）和（5）有

$$d_2(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\max\{\omega x_0,\ 1-x_0\}=\omega x_0 \tag{6}$$

和

$$\theta_2(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^2 x_0. \tag{7}$$

又由(4)、(5)和(6)、(7)逐次递推得

$$d_i(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^{i-1}x_0 \tag{8}$$

和

$$\theta_i(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^i x_0,$$

这里$i=3, 4, 5, \cdots$。

在(6)和(8)中对 f 取上确界导得 $d_i(\varphi_{X_0}^*)\leqslant\omega^{i-1}x_0$ $(i=2, 3, 4, \cdots)$。又对于在$[0, \omega x_0]$上达到最大值的单峰函数$\tilde{f}$，由$\varphi_{X_0}^*$的定义知道有$d_i(\varphi_{X_0}^*, \tilde{f})=\omega^{i-1}x_0$ $(i=2, 3, 4, \cdots)$。这就证明了当$\omega\leqslant x_0\leqslant 1$时，(1)成立。

当$\frac{1}{2}\leqslant x_0<\omega$时，从$x_0<\omega=1-\omega^2$得$\omega<\frac{1-x_0}{\omega}$.于是$\omega x_0=\omega-\omega(1-x_0)<\frac{1-x_0}{\omega}-\omega(1-x_0)=1-x_0$。由(4)和(5)得

$$d_2(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\max\{\omega x_0, 1-x_0\}=1-x_0 \tag{9}$$

和

$$\theta_2(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^2 x_0<\omega(1-x_0). \tag{10}$$

又由(4)、(5)和(9)、(10)逐次递推得

$$d_i(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^{i-2}(1-x_0) \tag{11}$$

和

$$\theta_i(\varphi_{X_0}^*, f)\leqslant\omega^{i-1}(1-x_0),$$

这里$i=3, 4, 5, \cdots$。

在(9)和(11)中对 f 取上确界导得 $d_i(\varphi_{X_0}^*) \leqslant \omega^{i-2}(1-x_0)$ $(i=2,3,4,\cdots)$. 又对于在 $[x_0+\omega^2(1-x_0),1]$ 上达到最大值的单峰函数 $\tilde{f}$, 由 $\varphi_{X_0}^*$ 的定义知道有 $d_i(\varphi_{X_0}^*,\tilde{f})=\omega^{i-2}(1-x_0)$ $(i=2,3,4,\cdots)$. 这就证明了当 $\frac{1}{2}\leqslant x_0<\omega$ 时，(1)成立. 引理1证毕.

引理2. 设 $\varphi_{X_0}^n$ 为一在 $[0,1]$ 上把第一次试验安排在 x_0，而以后按照(一)中A)那样安排头 n 次试验的试验策略，那末

$$d_i(\varphi_{X_0}^n)=\begin{cases}\dfrac{F_{n-i+1}}{F_n}x_0, & \dfrac{F_n}{F_{n+1}}\leqslant x_0\leqslant 1,\\ \dfrac{F_{n-i+1}}{F_{n-1}}(1-x_0), & \frac{1}{2}\leqslant x_0<\dfrac{F_n}{F_{n+1}},\\ \dfrac{F_{n-i+1}}{F_{n-1}}x_0, & \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}<x_0<\frac{1}{2},\\ \dfrac{F_{n-i+1}}{F_n}(1-x_0), & 0\leqslant x_0\leqslant\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}},\end{cases} \tag{12}$$

其中 $i=2,3,\cdots,n$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_j=F_{j-1}+F_{j-2}$, $j\geqslant 3$.

证. 由对称性知道，只要对 $\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 1$ 的情形来证明就够了.

对于任一单峰函数 f，用 D_{i1} 代表第 i 次试验后有唯一的最优的已试点 $\neq x_0$；用 D_{i2} 代表第 i 次试验后有唯一的最优的已试点 x_0；用 D_{i3} 代表第 i 次试验后有两个最优的已试点. 对于 $i=2,3,\cdots,n$，由记号的定义知道

$$d_i(\varphi_{X_0}^n,f)=\begin{cases}\dfrac{F_{n-i+1}}{F_{n-i+2}}d_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f), & \text{当出现 } D_{i1} \text{ 时},\\ \max\left\{\dfrac{F_{n-i}}{F_{n-i+2}}d_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f),\ \theta_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f)\right\}, & \text{当出现 } D_{i2} \text{ 时},\\ \dfrac{F_{n-i}}{F_{n-i+2}}d_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f), & \text{当出现 } D_{i3} \text{ 时},\end{cases} \tag{13}$$

$$\theta_i(\varphi_{X_0}^n,f)=\begin{cases}\dfrac{F_{n-i}}{F_{n-i+2}}d_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f), & \text{当出现 } D_{i1} \text{ 时},\\ \min\left\{\dfrac{F_{n-i}}{F_{n-i+2}}d_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f),\ \theta_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f)\right\}, & \text{当出现 } D_{i2} \text{ 时},\\ 0, & \text{当出现 } D_{i3} \text{ 时},\end{cases} \tag{14}$$

此地 $d_1(\varphi_{X_0}^n,f)=x_0$, $\theta_1(\varphi_{X_0}^n,f)=1-x_0$.

由(13)和(14)得

$$d_i(\varphi_{X_0}^n,f)\leqslant\max\left\{\frac{F_{n-i+1}}{F_{n-i+2}}d_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f),\ \theta_{i-1}(\varphi_{X_0}^n,f)\right\}, \tag{15}$$

$$\theta_i(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+2}} d_{i-1}(\varphi_{x_0}^n, f). \tag{16}$$

当 $\frac{F_n}{F_{n+1}} \leqslant x_0 \leqslant 1$ 时，有 $1-x_0 \leqslant \frac{F_{n+1}}{F_n} x_0 - x_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n} x_0$。由(15)和(16)有

$$d_2(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \max\left\{\frac{F_{n-1}}{F_n} x_0,\ 1-x_0\right\} = \frac{F_{n-1}}{F_n} x_0 \tag{17}$$

和

$$\theta_2(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-2}}{F_n} x_0. \tag{18}$$

又由(15)、(16)和(17)、(18)逐次递推得

$$d_i(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-i+1}}{F_n} x_0 \tag{19}$$

和

$$\theta_i(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-i}}{F_n} x_0,$$

这里 $i=3, 4, \cdots, n$。

在(17)和(19)中对 f 取上确界导得 $d_i(\varphi_{x_0}^n) \leqslant \frac{F_{n-i+1}}{F_n} x_0\ (i=2, 3, \cdots, n)$。又对于在 $\left[0, \frac{F_{n-1}}{F_n} x_0\right]$ 上达到最大值的单峰函数 $\tilde{f}$，由 $\varphi_{x_0}^n$ 的定义知道有 $d_i(\varphi_{x_0}^n, \tilde{f}) = \frac{F_{n-i+1}}{F_n} x_0\ (i=2, 3, \cdots, n)$。这就证明了当 $\frac{F_n}{F_{n+1}} \leqslant x_0 \leqslant 1$ 时，(12)成立。

当 $\frac{1}{2} \leqslant x_0 < \frac{F_n}{F_{n+1}}$ 时，从 $x_0 < \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ 得 $\frac{F_{n-1}}{F_n} < \frac{F_{n+1}}{F_n}(1-x_0)$。于是 $\frac{F_{n-1}}{F_n} x_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{F_{n-1}}{F_n}(1-x_0) < \frac{F_{n+1}}{F_n}(1-x_0) - \frac{F_{n-1}}{F_n}(1-x_0) = 1-x_0$。由(13)和(14)得

$$d_2(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \max\left\{\frac{F_{n-1}}{F_n} x_0,\ 1-x_0\right\} = 1-x_0, \tag{20}$$

$$\theta_2(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-2}}{F_n} x_0 < \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}(1-x_0). \tag{21}$$

又由(13)、(14)和(20)、(21)逐次递推得

$$d_i(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-i+1}}{F_{n-1}}(1-x_0) \tag{22}$$

$$\theta_i(\varphi_{x_0}^n, f) \leqslant \frac{F_{n-i}}{F_{n-1}}(1-x_0)$$

这里 $i=3, 4, \cdots, n$。

在(20)和(22)中对 f 取上确界导得 $d_i(\varphi_{x_0}'') \leqslant \frac{F_{n-i+1}}{F_{n-1}}(1-x_0)$ $(i=2,3,\cdots,n)$。

又对于在 $[x_0+\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}(1-x_0),\ 1]$ 上达到最大值的单峰函数 $\tilde{f}$，由 φ_{x_0}'' 的定义知道有

$d_i(\varphi_{x_0}'', \tilde{f}) = \frac{F_{n-i+1}}{F_{n-1}}(1-x_0)$ $(i=2, 3, \cdots, n)$。这就证明了当 $\frac{1}{2}\leqslant x_0<\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 时，(12)成立。引理2证毕。

引理3。对于 $[0, 1]$ 上的任一试验策略 φ，成立

$$1\leqslant\omega_i+\omega_i\omega_{i+1},\quad \tfrac{1}{2}\leqslant\omega_i\leqslant 1,\quad i=1, 2, 3, \cdots, \tag{23}$$

其中 $\omega_i=\frac{d_i(\varphi)}{d_{i+1}(\varphi)}$，$d_0(\varphi)=1$。

证。对于任一单峰函数 f，恒存在单峰函数 $\tilde{f}$ 使得

$$d_{i-1}(\varphi, f)\leqslant d_i(\varphi, \tilde{f})+d_{i+1}(\varphi, \tilde{f})\leqslant d_i(\varphi)+d_{i+1}(\varphi). \tag{24}$$

事实上，把第 $i-1$ 次试验后的最优的已试点（当有两个时，可任意指定其一）记为 x_{i-1}^*。把最优的已试点 x_{i-1}^* 和第 i 次的试验点 x_i 中之较靠近留下区间 $\triangle_{i-1}$ 的中点者（当两点对称时，可任意指定其一）记为 x_i^*。把 x_i^* 和第 $i+1$ 次的试验点 x_{i+1} 中之较靠近留下区间 $\triangle_i$ 的中点者记为 x_{i+1}^*，令 $\tilde{f}$：在 x_i^* 上取值 $f(x_{i-1}^*)+|x_i^*-x_{i-1}^*|$，在 x_{i+1}^* 上取值 $f(x_{i-1}^*)+|x_i^*-x_{i-1}^*|+|x_{i+1}^*-x_i^*|$，在 x_{i-1}^*、$\triangle_{i-1}$ 的端点及其以外的点上取值与 $f(x)$ 相同，在其余的点上取值用直线段连起来确定。

于(24)中对 f 取上确界得

$$d_{i-1}(\varphi)\leqslant d_i(\varphi)+d_{i+1}(\varphi). \tag{25}$$

以 $d_{i-1}(\varphi)$ 除(25)并引用记号 ω_i 即得(23)的第一个不等式。

由记号的定义立即知道 $\omega_i\leqslant 1$。由(23)的第一个不等式得 $\omega_i\geqslant\frac{1}{2}$。引理3证毕。

（四）

我们有下面的

定理1。在 $[0, 1]$ 上把第一次试验安排在 x_0 的不预定试验次数的最优策略有且只有与引理1中的 $\varphi_{x_0}^*$ 完全等价的试验策略。

证。由对称性知道只要对 $\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 1$ 的情形来证明就够了。

对于任一试验策略 φ_{x_0}，沿用引理3中的记号，有

$$d_i(\varphi_{x_0})=\omega_1\omega_2\cdots\omega_i,$$

对 $\varphi_{x_0}^*$ 沿用同样的记号打上"*"，有

$$d_i(\varphi_{x_0}^*)=\omega_1^*\omega_2^*\cdots\omega_i^*.$$

由记号的定义知道 $\omega_1=d_1(\varphi_{x_0})=x_0=d_1(\varphi_{x_0}^*)=\omega_1^*$。故若 $i\geqslant 2$，则当 $\omega\leqslant x_0\leqslant 1$ 时，由(1)知道 $\omega_j^*=\omega$，$j=2, 3, 4, \cdots$。从而有

$$\frac{d_i(\varphi_{x_0})}{d_i(\varphi_{x_0}^*)}=\frac{\omega_2\omega_3\cdots\omega_i}{\omega\ \omega\ \cdots\omega}. \tag{26}$$

我们在(26)中对于 $j=2, 3, \cdots, i$，依次当 $\frac{\omega_j}{\omega}\geqslant 1$ 时，用括号把 $\frac{\omega_j}{\omega}$ 括起来，称 $\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)$ 为一单因子。当 $\frac{\omega_j}{\omega}<1$ 时，据(23)有 $\omega_j+\omega_j\omega_{j+1}\geqslant 1$，而 $\omega+\omega\omega=1$。故 $\frac{\omega_j\omega_{j+1}}{\omega\ \omega}\geqslant\frac{1-\omega_j}{1-\omega}>1$，此时用括号把 $\frac{\omega_j\omega_{j+1}}{\omega\ \omega}$ 括起来，称 $\left(\frac{\omega_j\omega_{j+1}}{\omega\ \omega}\right)$ 为一双因子。最后：或者出现双因子 $\left(\frac{\omega_{i-1}\omega_i}{\omega\ \omega}\right)$，或者出现单因子 $\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)$；或者出现 $\frac{\omega_i}{\omega}<1$。所以如果我们定义

$$\beta_i=\begin{cases}1, & 若\frac{\omega_i}{\omega}\geqslant 1,\\ \frac{\omega_i}{\omega}, & 若\frac{\omega_i}{\omega}<1.\end{cases}$$

则存在 $m\ (\leqslant i-1)$ 个数 $\alpha_i\geqslant 1$，使得

$$\frac{d_i(\varphi_{X_0})}{d_i(\varphi_{X_0}{}^*)}=\frac{\omega_2\omega_3\cdots\omega_i}{\omega\ \omega\cdots\ \omega}=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\beta_i, \tag{27}$$

故或者 $d_i(\varphi_{X_0})\geqslant d_i(\varphi_{X_0}{}^*)$；如若 $d_i(\varphi_{X_0})<d_i(\varphi_{X_0}{}^*)$，则(27)中的 $\beta_i<1$。由此导得 $\alpha_{m+1}>1$ 和 $\beta_{i+1}=1$。于是有 $d_{i+1}(\varphi_{X_0})>d_{i+1}(\varphi_{X_0}{}^*)$。由于 φ_{X_0} 和 i 的任意性即得 $\varphi_{X_0}{}^*$ 在每一步都是滑动最优的。

若 φ_{X_0} 不与 $\varphi_{X_0}{}^*$ 完全等价，则在(27)中当 i 足够大后必有一个双因子或大于1的单因子。故若(27)中当 $i\to\infty$ 时，$\beta_i\to 1$，则 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{d_i(\varphi_{X_0})}{d_i(\varphi_{X_0}{}^*)}=\alpha>1$。如若(27)中 $\lim\limits_{i\to\infty}\beta_i=1$ 不成立，则存在 $\varepsilon>0$ 和无穷多个 $\beta_i<1-\varepsilon$。于是存在无穷多个双因子 $\left(\frac{\omega_i\omega_{i+1}}{\omega\ \omega}\right)\geqslant\frac{1-\omega_i}{1-\omega}=\frac{1-\beta_i\omega}{1-\omega}>1+\frac{\omega}{1-\omega}\varepsilon$，导得 $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m=+\infty$。但据(23)的第二个不等式有 $\omega_i\geqslant\frac{1}{2}$，故 $\beta_i\geqslant\frac{1}{2\omega}$。从而 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{d_i(\varphi_{X_0})}{d_i(\varphi_{X_0}{}^*)}=+\infty$。所以不论何种情况都存在正整数 N，使得当 $i\geqslant N$ 时，成立 $d_i(\varphi_{X_0})>d_i(\varphi_{X_0}{}^*)$。即 φ_{X_0} 不可能在每一步都是滑动最优的。这就证明了当 $\omega\leqslant x_0\leqslant 1$ 时定理1成立。

当 $\frac{1}{2}\leqslant x_0<\omega$ 时，由记号的定义和(1)知道 $d_2(\varphi_{X_0})\geqslant 1-x_0=d_2(\varphi_{X_0}{}^*)$ 和 $\omega_j^*=\omega$，$j=3, 4, 5, \cdots$。从而有

$$\frac{d_i(\varphi_{X_0})}{d_i(\varphi_{X_0}{}^*)}=\frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1-x_0}\cdot\frac{\omega_3\omega_4\cdots\omega_i}{\omega\ \omega\ \cdots\omega}, \tag{28}$$

其中 $\frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1-x_0}\geqslant 1$。

若我们在(28)中象上面一样对于 $j=3, 4, \cdots, i$ 依次作起单因子、双因子和 β_i 来，则存在 $m\ (\leqslant i-1)$ 个数 $\alpha_j\geqslant 1$，使得

$$\frac{d_i(\varphi_{X_0})}{d_i(\varphi_{X_0}{}^*)}=\frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1-x_0}\cdot\frac{\omega_3\omega_4\cdots\omega_i}{\omega\ \omega\ \cdots\omega}=\alpha_1\alpha_2\cdots_m\alpha\beta_i, \tag{29}$$

其中 $\alpha_1 = \frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1-x_0}$. 于是定理1的余下部分的证明除了改(27)为(29)以外可照抄当 $\omega \leqslant x_0 \leqslant 1$ 时的相应部分. 定理1证毕.

推论. 黄金分割法 $\varphi_\omega{}^*$ 是〔0, 1〕上所有(对 x_0 而言)不预定试验次数的最优策略 $\varphi_{X_0}{}^*$ 中每一步的精度取最佳值者.

证. 据定理1只要证明具有: $\inf\limits_{\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 1} d_i(\varphi_{X_0}{}^*) = d_i(\varphi_\omega{}^*)$ 和 $\inf\limits_{0\leqslant x_0\leqslant \frac{1}{2}} d_i(\varphi_{X_0}{}^*) = d_i(\varphi_{\omega^2}{}^*)$. 但它们可由(1)立即推出.

定理2. 在〔0, 1〕上把第一次试验安排在 x_0 的 n 次试验的最优策略有且只有头 n 步都与引理2中的 $\varphi_{X_0}{}^n$ 等价的试验策略.

证. 由对称性知道, 只要对 $\frac{1}{2} \leqslant x_0 \leqslant 1$ 的情形来证明就够了.

对于任一试验策略 φ_{X_0}, 沿用引理3中的记号, 有

$$d_i(\varphi_{X_0}) = \omega_1\omega_2\cdots\omega_i,$$

对 $\varphi_{X_0}{}^n$ 沿用同样的记号打上"*", 有

$$d_i(\varphi_{X_0}{}^n) = \omega_1{}^*\omega_2{}^*\cdots\omega_i{}^*.$$

由记号的定义知道 $\omega_1 = d_1(\varphi_{X_0}) = x_0 = d_1(\varphi_{X_0}{}^n) = \omega_1{}^*$. 故若 $i \geqslant 2$, 则

$$\frac{d_n(\varphi_{X_0})}{d_n(\varphi_{X_0}{}^n)} = \frac{\omega_2\omega_3\cdots\omega_n}{\omega_2{}^*\omega_3{}^*\cdots\omega_n{}^*} \tag{30}$$

其中当 $\frac{F_n}{F_{n+1}} \leqslant x_0 \leqslant 1$ 时, 由(12)知道

$$\omega_2{}^* = \frac{F_{n-1}}{F_n},\quad \omega_3{}^* = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}},\quad \cdots,\quad \omega_{n-1}{}^* = \frac{2}{3},\quad \omega_n{}^* = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

我们在(30)中对于 $j = 2, 3, \cdots, n$, 依次当 $\frac{\omega_j}{\omega_j{}^*} \geqslant 1$ 时, 用括号把 $\frac{\omega_j}{\omega_j{}^*}$ 括起来, 称 $\left(\frac{\omega_j}{\omega_j{}^*}\right)$ 为一单因子. 当 $\frac{\omega_j}{\omega_j{}^*} < 1$ 时, 据(23)有 $\omega_j + \omega_j\omega_{j+1} \geqslant 1$, 据(31)有 $\omega_j{}^* + \omega_j{}^*\omega_{j+1}{}^* = 1$, 故 $\frac{\omega_j\ \omega_{j+1}}{\omega_j{}^*\omega_{j+1}{}^*} \geqslant \frac{1-\omega_j}{1-\omega_j{}^*} > 1$, 此时用括号把 $\frac{\omega_j\omega_{j+1}}{\omega_j{}^*\omega_{j+1}{}^*}$ 括起来, 称 $\left(\frac{\omega_j\omega_{j+1}}{\omega_j{}^*\omega_{j+1}{}^*}\right)$ 为一双因子. 最后: 或者出现双因子 $\left(\frac{\omega_{n-1}\omega_n}{\omega_{n-1}{}^*\omega_n{}^*}\right)$, 否则由(23)的第二个不等式有 $\omega_n \geqslant \frac{1}{2}$, 而由(31)有 $\omega_n{}^* = \frac{1}{2}$. 于是有单因子 $\left(\frac{\omega_n}{\omega_n{}^*}\right)$. 故存在 $m\ (\leqslant n-1)$ 个数 $\alpha_j \geqslant 1$, 使得

$$\frac{d_n(\varphi_{X_0})}{d_n(\varphi_{X_0}{}^n)} = \frac{\omega_2\omega_3\cdots\omega_n}{\omega_2{}^*\omega_3{}^*\cdots\omega_n{}^*} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \geqslant 1. \tag{32}$$

即 $\varphi_{X_0}{}^n$ 在第 n 步是最优的.

若在头n步中至少有一步 φ_{X_0} 不与 $\varphi_{X_0}^n$ 等价，则在(32)中必有一个双因子或大于1的单因子。从而 $d_n(\varphi_{X_0}) > d_n(\varphi_{X_0}^n)$。即 φ_{X_0} 在第n步不可能是最优的。这就证明了当 $\frac{F_n}{F_{n+1}} \leqslant x_0 \leqslant 1$ 时，定理2成立。

当 $\frac{1}{2} \leqslant x_0 < \frac{F_n}{F_{n+1}}$ 时，由记号的定义和(12)知道 $d_2(\varphi_{X_0}) \geqslant 1 - x_0 = d_2(\varphi_{X_0}^n)$。故(30)可以写成

$$\frac{d_n(\varphi_{X_0})}{d_n(\varphi_{X_0}^n)} = \frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1 - x_0} \frac{\omega_3\omega_4\cdots\omega_n}{\omega_3^*\omega_4^*\cdots\omega_n^*} \tag{33}$$

其中 $\frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1 - x_0} \geqslant 1$，且由(12)知道

$$\omega_3^* = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}, \quad \omega_4^* = \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}, \quad \cdots, \quad \omega_{n-1}^* = \frac{2}{3}, \quad \omega_n^* = \frac{1}{2}. \tag{34}$$

若我们在(33)中象上面一样对于 $j = 3, 4, \cdots, n$ 依次作起单因子和双因子来，则存在 $m(\leqslant n-1)$ 个数 $\alpha_j \geqslant 1$，使得

$$\frac{d_n(\varphi_{X_0}^n)}{d_n(\varphi_{X_0})} = \frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1 - x_0} \frac{\omega_3\omega_4\cdots\omega_n}{\omega_3^*\omega_4^*\cdots\omega_n^*} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \geqslant 1, \tag{35}$$

其中 $\alpha_1 = \frac{d_2(\varphi_{X_0})}{1 - x_0}$，即 $\varphi_{X_0}^n$ 在第n步是最优的。

如果在头n步中至少有一步 φ_{X_0} 不与 $\varphi_{X_0}^n$ 等价，则在(35)中必有一个双因子或大于1的单因子。于是 $d_n(\varphi_{X_0}) > d_n(\varphi_{X_0}^n)$。即 φ_{X_0} 在第n步不可能是最优的。定理2证毕。

推论. n次试验的分数法是〔0，1〕上所有（对 x_0 而言）n次试验的最优策略 $\varphi_{X_0}^n$ 中第n步的精度取最佳值者。

证. 据定理2只要证明具有：$\inf\limits_{\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 1} d(\varphi_{X_0}^n) = d_n\varphi(\frac{F_n}{F_{n+1}})$ 和 $\inf\limits_{0\leqslant x_0\leqslant \frac{1}{2}} d_n(\varphi_{X_0}) = d_n(\varphi_{\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}})$。但它们可由(12)立即推出。

本文第一稿曾经于1973年投《数学的实践与认识》，1974年8月1日审查完毕，建议作者作一些删节和文字上的修改。那个稿子是按“n次试验的分数法在n步是最优的，而其极限是黄金分划法，据此黄金分划法比其他试验策略优”这一概念下写的。修改稿经过了长时间几次的反复，早期采纳了洪加威在〔2〕中提出的“黄金分划法在无穷远处是最优的！据此黄金分划法比其他试验策略优”这一概念。后来一直致力于使单变量的情形和多变量的情形统一起来。最近承范宜传同志仔细看后，提出了宝贵的精简意见，作者在此表示衷心的感谢。

参考文献

〔1〕赖万才，福建师大，1973，1，41—42.

〔2〕洪加威，数学的实践与认识，1973，2，34—41.