

文章编号: 1000-5013(2013)02-0236-05

推广的几乎可分解的 26 圈系

蒲利群¹, 方佳¹, 马俊²

(1. 郑州大学 数学系, 河南 郑州 450001;

2. 上海交通大学 数学系, 上海 200240)

摘要: 研究推广的几乎可分解圈系(ARCS)的存在性, 利用差的方法, 证明了阶为 n 的推广的几乎可分解圈系(GARCS)存在的充分必要条件为: $n \equiv 13 \pmod{52}$. 推广了 P. Adams 等提出的方法构造 $26\text{GARCS}(n)$, 进一步给出 $26\text{GARCS}(n)$ 的谱.

关键词: 圈系; 可分解圈系; 几乎可分解圈系; 推广的几乎可分解圈系; 平行类

中图分类号: O 157.2

文献标志码: A

1 基本知识

(X, C) 称为阶是 n 的 k 圈系, 如果 C 为边不交的 k 圈集合, 且为完全无向图 K_n 边集的划分^[1-8], 其中 K_n 的顶点集为 X , $|X| = n$.

圈系 (X, C) 称为可分解圈系, 如果 C 中的圈能够分为若干个集合, 每个集合中的元素为边不交的圈, 其为完全图 K_n 的一个 2-正则支撑子图, 称该集合为一个平行类.

下面给出完全图 K_n 的可分解圈系谱的存在性定理.

定理 1^[2] 阶为 n 的可分解的 k 圈系存在的充分必要条件: $n \geq k \geq 3$, n 和 k 是奇数, 并且 k 整除 n .

如果 k 不整除 n , 令 $n = kq + r$, $0 < r < k$. 当 $r = 1$, 仅去掉一个点的顶点不相交的 k 圈的集合称为一个几乎平行类, 它含有 $\frac{n-1}{k}$ 个顶点不相交的 k 圈.

圈系 (X, C) 称为几乎可分解圈系(almost resolvability cycle system, ARCS); 如果 C 中 k 圈能够尽可能多地划分为几乎平行类, 并且剩余的 k 圈顶点互不相交, 用 $k\text{ARCS}(n)$ 表示. $3\text{ARCS}(n)$ ^[9] 和 $6\text{ARCS}(n)$ ^[5] 已经得到解决.

当 $2 \leq r < k$, P. Adams 等^[3] 给出了阶为 n 的推广的几乎可分解的 k 圈系的概念. 去掉 r 个点的顶点不相交的 k 圈的集合也称为一个几乎平行类, 它含有 $\frac{n-r}{k}$ 个顶点不相交的 k 圈. 圈系 (X, C) 为推广的几乎可分解的圈系(generalized almost resolvability cycle system, GARCS), 如果 C 中的 k 圈能够尽可能多的划分为几乎平行类, 并且剩余的 k 圈顶点互不相交, 剩余的 k 圈称为一个短平行类或短轨道, 用 $k\text{GARCS}(n)$ 表示. 文献^[3]的结果表明: $10\text{GARCS}(n)$ 的谱为 $n \equiv 5 \pmod{20}$.

2 三个基本构造

给出的 3 个例子是构造 $26\text{GARCS}(n)$ 的基础. 其中: $V(G)$ 表示图 G 的点集; K_n 表示阶为 n 的完全图; $K_{m,n}$ 表示两个部分的点集数分别为 m 和 n 的完全二部图.

例 1 $26\text{GARCS}(65)$

收稿日期: 2012-10-10

通信作者: 蒲利群(1966-), 女, 副教授, 主要从事组合设计与编码理论的研究. E-mail: liqunpu@zzu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071163)

令点集 $V(K_{65}) = \{i_j | i \in Z_{13}, j = 1, 2, 3, 4, 5, \text{有 } 40 \text{ 个几乎平行类. } 13 \text{ 个几乎平行类是在模 } 13 \text{ 下循环, 其下标被固定为}$

$$\{(0_1, 1_1, 3_1, 6_1, 10_1, 2_1, 8_1, 8_2, 2_2, 10_2, 6_2, 3_2, 1_2, 0_2, 0_3, 1_3, 3_3, 6_3, 10_3, 2_3, 8_3, 8_4, 1_5, 6_4, 3_5, 0_4), \\ (5_5, 6_5, 8_5, 11_5, 2_5, 7_5, 0_5, 12_3, 10_5, 10_4, 7_4, 3_4, 11_4, 5_4, 4_4, 2_4, 12_2, 9_4, 9_2, 5_9, 9_1, 9_3, 12_1, 4_3, 11_1, 5_3,)\}$$

24 个几乎平行类为

$$\{(0_i, m_j, (2m)_i, (3m)_j, (4m)_i, (5m)_j, (6m)_i, (7m)_j, (8m)_i, (9m)_j, (10m)_i, (11m)_j, (12m)_i, \\ 0_j, m_i, (2m)_j, (3m)_i, (4m)_j, (5m)_i, (6m)_j, (7m)_i, (8m)_j, (9m)_i, (10m)_j, (11m)_i, (12m)_j), \\ (0_k, m_l, (2m)_k, (3m)_l, (4m)_k, (5m)_l, (6m)_k, (7m)_l, (8m)_k, (9m)_l, (10m)_k, (11m)_l, (12m)_k, \\ 0_l, m_k, (2m)_l, (3m)_k, (4m)_l, (5m)_k, (6m)_l, (7m)_k, (8m)_l, (9m)_k, (10m)_l, (11m)_k, (12m)_l)\}.$$

其中: (i, j, k, l) 和 m 可以取以下 24 种情形. 即

- 1) $(i, j, k, l) = (1, 3, 4, 5), m = 1, 2, 4;$
- 2) $(i, j, k, l) = (5, 3, 4, 2), m = 4, 5, 6;$
- 3) $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4), (2, 5, 4, 1,), (2, 3, 5, 1), m = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

最后 3 个几乎平行类为

$$\{(0_5, 1_3, 3_5, 4_3, 6_5, 7_3, 9_5, 10_3, 12_5, 0_3, 2_5, 3_3, 5_5, 6_3, 8_5, 9_3, 11_5, 12_3, 1_5, 2_3, 4_5, 5_3, 7_5, 8_3, 10_5, 11_3), \\ (0_4, 1_2, 2_4, 3_2, 4_4, 5_2, 6_4, 7_2, 8_4, 9_2, 10_4, 11_2, 12_4, 0_2, 1_4, 2_2, 3_4, 4_2, 5_4, 6_2, 7_4, 8_2, 9_4, 10_2, 11_4, 12_2)\}; \\ \{(0_5, 3_3, 6_5, 9_3, 12_5, 2_3, 5_5, 8_3, 11_5, 1_3, 4_5, 7_3, 10_5, 0_3, 3_5, 6_3, 9_5, 12_3, 2_5, 5_3, 8_5, 11_3, 1_5, 4_3, 7_5, 10_3), \\ (0_4, 2_2, 4_4, 6_2, 8_4, 10_2, 12_4, 1_2, 3_4, 5_2, 7_4, 9_2, 11_4, 0_2, 2_4, 4_2, 6_4, 8_2, 10_4, 12_2, 1_4, 3_2, 5_4, 7_2, 9_4, 1_2)\}; \\ (0_1, 3_3, 8_1, 11_3, 3_1, 6_3, 11_1, 1_3, 6_1, 9_3, 1_1, 4_3, 9_1, 12_3, 4_1, 7_3, 12_1, 2_3, 7_1, 10_3, 2_1, 5_3, 10_1, 0_3, 5_1, 8_3), \\ (0_4, 5_5, 11_4, 3_5, 9_4, 1_5, 7_4, 12_5, 5_4, 10_5, 3_4, 8_5, 1_4, 6_5, 12_4, 4_5, 10_4, 2_5, 8_4, 0_5, 6_4, 11_5, 4_4, 9_5, 2_4, 7_5)\}.$$

例 2 带洞的 26GARCS(65)

令点集 $V(K_{65}/K_{13}) = \{i_j | i \in Z_{13}, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$, 点集 $H = \{i_1 | i \in Z_{13}\}$, 其中: H 为阶 13 的洞, 并且 $H \subset V(K_{65}/K_{13})$. 如果 K_{65}/K_{13} 的边集能够划分成 26 圈系, 称这个圈系为阶 65, 洞 13 的 26 圈系.

集合 F_1 含下面的两个几乎平行类, 该平行类在模 13 下循环, 其下标固定为

$$\{(0_2, 1_2, 3_2, 6_2, 10_2, 2_2, 8_2, 11_1, 4_2, 5_1, 9_2, 7_1, 12_2, 12_1, 7_2, 9_1, 5_2, 4_1, 11_2, 8_1, 8_4, 2_5, 10_4, 6_5, 3_4, 1_5), \\ (0_3, 1_3, 3_3, 6_3, 10_3, 2_3, 8_3, 8_5, 2_1, 10_5, 6_1, 3_5, 1_1, 0_5, 0_1, 1_4, 3_1, 6_4, 10_1, 2_4, 4_5, 7_4, 11_5, 11_4, 4_3, 9_4)\}; \\ \{(0_4, 1_4, 3_4, 6_4, 10_4, 2_4, 8_4, 8_3, 11_1, 4_3, 5_1, 9_3, 1_1, 12_3, 12_1, 1_3, 9_1, 5_3, 4_1, 11_3, 8_1, 7_4, 10_3, 10_2, 12_5, 0_2), \\ (1_5, 0_1, 11_5, 6_1, 0_5, 10_1, 12_4, 2_1, 9_4, 3_1, 11_4, 7_1, 3_5, 9_5, 4_5, 8_5, 5_5, 7_5, 6_5, 8_2, 7_3, 6_2, 3_3, 12_2, 6_3, 1_2)\}.$$

集合 F_2 含下面的 12 个几乎平行类, 即

$$\{(0_i, m_j, (2m)_i, (3m)_j, (4m)_i, (5m)_j, (6m)_i, (7m)_j, (8m)_i, (9m)_j, (10m)_i, (11m)_j, (12m)_i, \\ 0_j, m_i, (2m)_j, (3m)_i, (4m)_j, (5m)_i, (6m)_j, (7m)_i, (8m)_j, (9m)_i, (10m)_j, (11m)_i, (12m)_j), \\ (0_k, m_l, (2m)_k, (3m)_l, (4m)_k, (5m)_l, (6m)_k, (7m)_l, (8m)_k, (9m)_l, (10m)_k, (11m)_l, (12m)_k, \\ 0_l, m_k, (2m)_l, (3m)_k, (4m)_l, (5m)_k, (6m)_l, (7m)_k, (8m)_l, (9m)_k, (10m)_l, (11m)_k, (12m)_l)\}.$$

其中: $(i, j, k, l) = (2, 4, 3, 5), m = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$

$$\{(0_1, 1_3, 2_4, 3_3, 4_4, 5_3, 6_4, 7_3, 8_4, 9_3, 10_4, 11_3, 12_4, 0_3, 1_4, 2_3, 3_4, 4_3, 5_4, 6_3, 7_4, 8_3, 9_4, 10_3, 11_4, 12_3), \\ (0_5, 3_2, 6_5, 9_2, 12_5, 2_2, 5_5, 8_2, 11_5, 1_2, 4_5, 7_2, 10_5, 0_2, 3_5, 6_2, 9_5, 12_2, 2_5, 5_2, 8_5, 11_2, 1_5, 4_2, 7_5, 10_2)\}; \\ \{(0_4, 2_3, 4_4, 6_3, 8_4, 10_3, 12_4, 1_3, 3_4, 5_3, 7_4, 9_3, 11_4, 0_3, 2_4, 4_3, 6_4, 8_3, 10_4, 12_3, 1_4, 3_3, 5_4, 7_3, 9_4, 1_3), \\ (0_5, 4_2, 8_5, 12_2, 3_5, 7_2, 11_5, 2_2, 6_5, 10_2, 1_5, 5_2, 9_5, 0_2, 4_5, 8_2, 12_5, 3_2, 7_5, 11_2, 2_5, 6_2, 10_5, 1_2, 5_5, 9_2)\}; \\ \{(0_4, 9_3, 12_4, 8_3, 11_4, 7_3, 10_4, 6_3, 9_4, 5_3, 8_4, 4_3, 7_4, 3_3, 6_4, 2_3, 5_4, 1_3, 4_4, 0_3, 3_4, 12_3, 2_4, 11_3, 1_4, 10_3), \\ (0_5, 5_2, 10_5, 2_2, 7_5, 12_2, 4_5, 9_2, 1_5, 6_2, 11_5, 3_2, 8_5, 0_2, 5_5, 10_2, 2_5, 7_2, 12_5, 4_2, 9_5, 1_2, 6_5, 11_2, 3_5, 8_2)\}; \\ \{(0_4, 5_3, 11_4, 3_3, 9_4, 1_3, 7_4, 12_3, 5_4, 10_3, 3_4, 8_3, 1_4, 6_3, 12_4, 4_3, 10_4, 2_3, 8_4, 0_3, 6_4, 11_3, 4_4, 9_3, 2_4, 7_3), \\ (0_5, 6_2, 12_5, 5_2, 11_5, 4_2, 10_5, 3_2, 9_5, 2_2, 8_5, 1_2, 7_5, 0_2, 6_5, 12_2, 5_5, 11_2, 4_5, 10_2, 3_5, 9_2, 2_5, 8_2, 1_5, 7_2)\}; \\ \{(0_2, 2_3, 4_2, 6_3, 8_2, 10_3, 12_2, 1_3, 3_2, 5_3, 7_2, 9_3, 11_2, 0_3, 2_2, 4_3, 6_2, 8_3, 10_2, 12_3, 1_2, 3_3, 5_2, 7_3, 9_2, 1_3), \\ (0_4, 1_5, 2_4, 3_5, 4_4, 5_5, 6_4, 7_5, 8_4, 9_5, 10_4, 11_5, 12_4, 0_5, 1_4, 2_5, 3_4, 4_5, 5_4, 6_5, 7_4, 8_5, 9_4, 10_5, 11_4, 12_5)\}; \\ \{(0_2, 3_3, 7_2, 10_3, 1_2, 4_3, 8_2, 11_3, 2_2, 5_3, 9_2, 12_3, 3_2, 6_3, 10_2, 0_3, 4_2, 7_3, 11_2, 1_3, 5_2, 8_3, 12_2, 2_3, 6_2, 9_3), \\$$

$(0_4, 6_5, 11_4, 4_5, 9_4, 2_5, 7_4, 0_5, 5_4, 11_5, 3_4, 9_5, 1_4, 7_5, 12_4, 5_5, 10_4, 3_5, 8_4, 1_5, 6_4, 12_5, 4_4, 10_5, 2_4, 8_5)\}$,
一个短平行类 S 为

$\{(0_3, 5_2, 11_3, 3_2, 9_3, 1_2, 7_3, 12_2, 5_3, 10_2, 3_3, 8_2, 1_3, 6_2, 12_3, 4_2, 10_3, 2_2, 8_3, 0_2, 6_3, 11_2, 4_3, 9_2, 2_3, 7_2)\}$.

其中: F_1 中 k 圈与洞 H 中的点相交, 但是 $F_2 \cup S$ 中所有的 26 圈与洞 H 中的点不相交.

例 3 26GARCS(117)

令 $V(K_{117}) = \{i_j | i \in Z_{13}, j = 1, 2, 3, \cdots, 9\}$. 该圈系含有 65 个几乎平行类和一个短平行类, 其中每一类包含 4 个 26 圈.

两个几乎平行类在模 13 下循环, 其下标是固定的, 即

$\{(0_1, 1_1, 3_1, 6_1, 10_1, 2_1, 8_1, 11_9, 4_1, 5_9, 9_1, 7_9, 12_3, 7_4, 9_3, 5_4, 4_3, 11_4, 8_7, 2_5, 10_6, 6_8, 3_5, 5_6, 5_1, 6_6),$
 $(0_2, 1_2, 3_2, 6_2, 10_2, 2_2, 8_2, 11_7, 4_2, 5_7, 9_2, 7_7, 12_2, 12_6, 9_5, 9_6, 5_3, 4_6, 10_7, 8_8, 2_7, 10_8, 6_7, 3_8, 1_7, 12_1),$
 $(0_3, 1_3, 3_3, 6_3, 10_3, 2_3, 8_3, 11_8, 11_3, 4_8, 12_7, 7_3, 1_5, 7_8, 12_5, 5_2, 9_7, 7_2, 4_7, 3_9, 8_5, 2_8, 10_9, 0_8, 4_9, 1_8),$
 $(0_4, 1_4, 3_4, 6_4, 10_4, 2_4, 8_4, 11_5, 4_4, 5_5, 9_4, 7_5, 12_8, 0_7, 2_9, 0_5, 1_9, 4_5, 9_9, 11_6, 12_4, 0_6, 0_9, 7_6, 3_7, 11_1)\}$;
 $\{(0_5, 1_5, 3_5, 6_5, 10_5, 2_5, 8_5, 11_1, 4_5, 5_1, 9_5, 7_1, 12_2, 12_1, 7_3, 9_1, 5_3, 4_1, 11_3, 8_2, 2_3, 10_2, 6_3, 9_2, 8_3, 7_2),$
 $(0_6, 1_6, 3_6, 6_6, 10_6, 2_6, 8_6, 10_1, 12_6, 3_3, 4_6, 4_3, 6_2, 10_3, 11_5, 0_2, 5_5, 11_2, 12_4, 1_2, 4_4, 2_2, 6_4, 9_9, 11_8, 0_4),$
 $(0_7, 1_7, 3_7, 6_7, 10_7, 2_7, 8_7, 8_1, 11_7, 0_1, 1_4, 3_1, 7_4, 2_1, 12_8, 6_1, 7_8, 1_1, 9_8, 1_3, 7_5, 5_6, 8_4, 11_6, 12_7, 9_6),$
 $(0_8, 1_8, 3_8, 6_8, 10_8, 2_8, 8_8, 8_9, 2_9, 10_9, 3_9, 6_9, 1_9, 0_9, 5_8, 7_9, 4_8, 4_7, 12_9, 7_7, 5_9, 3_4, 4_9, 5_4, 11_9, 4_2)\}$.

以上 26 个几乎平行类使用了所有的纯差和部分的混差, 剩余的混差下标, 如表 1 所示. 因下标相同的两个混差可构造一个 26 圈, 表 1 由包含 4 对下标的列和包含一对下标列组成.

表 1 剩余混差的下标
Tab. 1 Remaining mixed difference subscript

列标号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
重复数	3	2	2	2	2	2	4	4	2
下标 i, j	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1, 8	1, 9	1, 2
	3, 5	2, 4	2, 3	3, 7	3, 8	2, 6	2, 6	2, 8	3, 9
	2, 8	5, 7	5, 8	4, 6	4, 7	3, 4	3, 7	4, 7	4, 5
	6, 9	6, 8	6, 9	8, 9	5, 9	5, 9	4, 9	5, 6	6, 7
列标号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
重复数	2	2	2	2	2	2	2	2	短类
下标 i, j	2, 9	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	2, 9	2, 8	
	5, 7	2, 5	2, 5	2, 7	2, 9	2, 4	5, 7	3, 9	
	6, 8	4, 6	3, 8	3, 6	3, 5	3, 9	6, 8	4, 5	4, 8
	3, 4	7, 9	7, 9	4, 8	7, 8	5, 8	3, 6	6, 7	

下标 i, j 的混差如果已经出现在上面的 26 类中 x 次, 那么它将在这个表格中出现 $\frac{13-x}{2}$ 次. 例如, 下标为 1, 2 的一个混差出现在上面的 26 类中 3 次, 那么它将在表格中出现 5 次(3 次在第 1 列和 2 次在第 9 列). 与第 1 列下标(1, 2; 3, 5; 4, 8; 6, 9)相关的混差(除去 26 类中用过的)为

$2_{1,2}, 3_{1,2}, 4_{1,2}, 6_{1,2}, 7_{1,2}, 8_{1,2}, 9_{1,2}, 10_{1,2}, 11_{1,2}, 12_{1,2}, 2_{3,5}, 3_{3,5}, 4_{3,5}, 5_{3,5}, 8_{3,5},$
 $9_{3,5}, 10_{3,5}, 11_{3,5}, 12_{3,5}, 0_{3,5}, 1_{4,8}, 2_{4,8}, 3_{4,8}, 4_{4,8}, 5_{4,8}, 6_{4,8}, 7_{4,8}, 8_{4,8}, 9_{4,8}, 10_{4,8},$
 $12_{4,8}, 0_{4,8}, 1_{6,9}, 2_{6,9}, 3_{6,9}, 4_{6,9}, 5_{6,9}, 7_{6,9}, 8_{6,9}, 9_{6,9}, 10_{6,9}, 12_{6,9}.$

使用混差 $2_{1,2}, 3_{1,2}, 2_{3,5}, 3_{3,5}, 1_{4,8}, 2_{4,8}, 1_{6,9}, 2_{6,9}$, 可得到第 1 个几乎平行类, 含 4 个圈, 即

$(0_1, 2_2, 12_1, 1_2, 11_1, 0_2, 10_1, 12_2, 9_1, 11_2, 8_1, 10_2, 7_1, 9_2, 6_1, 8_2, 5_1, 7_2, 4_1, 6_2, 3_1, 5_2, 2_1, 4_2, 1_1, 3_2),$
 $(0_3, 2_5, 12_3, 1_5, 11_3, 0_5, 10_3, 12_5, 9_3, 11_5, 8_3, 10_5, 7_3, 9_5, 6_3, 8_5, 5_3, 7_5, 4_3, 6_5, 3_3, 5_5, 2_3, 4_5, 1_3, 3_5),$
 $(0_4, 1_8, 12_4, 0_8, 11_4, 12_8, 10_4, 11_8, 9_4, 10_8, 8_4, 9_8, 7_4, 8_8, 6_4, 7_8, 5_4, 6_8, 4_4, 5_8, 3_4, 4_8, 2_4, 3_8, 1_4, 2_8),$
 $(0_6, 1_9, 12_6, 0_9, 11_6, 12_9, 10_6, 11_9, 9_6, 10_9, 8_6, 9_9, 7_6, 8_9, 6_6, 7_9, 5_6, 6_9, 4_6, 5_9, 3_6, 4_9, 2_6, 3_9, 1_6, 2_9),$

同理, 使用混差 $4_{1,2}, 5_{1,2}, 4_{3,5}, 5_{3,5}, 3_{4,8}, 4_{4,8}, 3_{6,9}, 4_{6,9}$, 可得到第 2 个几乎平行类, 即

$(0_1, 4_2, 11_1, 2_2, 9_1, 0_2, 7_1, 11_2, 5_1, 9_2, 3_1, 7_2, 1_1, 5_2, 12_1, 3_2, 10_1, 1_2, 8_1, 12_2, 6_1, 10_2, 4_1, 8_2, 2_1, 6_2),$
 $(0_3, 4_5, 12_3, 3_5, 11_3, 2_5, 10_3, 1_5, 9_3, 0_5, 8_3, 12_5, 7_3, 11_5, 6_3, 10_5, 5_3, 9_5, 4_3, 8_5, 3_3, 7_5, 2_3, 6_5, 1_3, 5_5),$

$(0_4, 3_8, 12_4, 2_8, 11_4, 1_8, 10_4, 0_8, 9_4, 12_8, 8_4, 11_8, 7_4, 10_8, 6_4, 9_8, 5_4, 8_8, 4_4, 7_8, 3_4, 6_8, 2_4, 5_8, 1_4, 4_8),$
 $(0_6, 3_9, 12_6, 2_9, 11_6, 1_9, 10_6, 0_9, 9_6, 12_9, 8_6, 11_9, 7_6, 10_9, 6_6, 9_9, 5_6, 8_9, 4_6, 7_9, 3_6, 6_9, 2_6, 5_9, 1_6, 4_9).$

使用相同的方法可构造其他所有的几乎平行类.

2 构造 26GARCS(n) s

为了证明主要的结果, 需要定理 2.

定理 2^[7] 二部图 $K_{2m, 2m}$ 能划分成 $2k$ 圈的平行类的充分必要条件是 $2k \mid 2m$, 但图 $K_{6,6}$ 不能划分成 6 圈的平行类.

下面给出 26GARCS($52t+13$)的构造, 其中: $2t \geq 6$.

记 $52t+13=26(2t)+13$, 则令 (Q, o) 是一个阶 $2t$, 含有洞 H 的交换拟群^[7], 其中: $H = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$, $|h_i| = 2, 1 \leq i \leq t$; 对于每一个洞 $h \in H$, (h, o) 为一个子拟群. 又令 $\infty = \{\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_{13}\}$, 则集合 $X = \infty \cup (Q \times \{1, 2, 3, \dots, 26\})$ 和 $h_i = \{x_i, y_i\}, 1 \leq i \leq t$.

$$K_{26(2t)+13} = K_{\infty+26h_1+\dots+26h_t} = K_{\infty+h_1 \times \{1, 2, \dots, 26\}} + \sum_{i=2}^t K_{h_i \times \{1, 2, \dots, 26\}} +$$

$$\sum_{i=2}^t K_{\infty, h_i \times \{1, 2, \dots, 26\}} + \sum_{a \in h_i, b \in h_j, i \neq j} K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}.$$

构造一个 26 圈集合 C .

1) 对洞 $h_1 \in H$, 利用例 1 构造图 $K_{\infty+h_1 \times \{1, 2, \dots, 26\}}$ 的 40 个几乎平行类, 将这些 26 圈放在 C 中.

2) 对于每一个 $h_1 \in H, i \geq 2$, 利用例 2 构造图 $K_{h_i \times \{1, 2, \dots, 26\}} + K_{\infty+h_i \times \{1, 2, \dots, 26\}}$ 的几乎平行类 F_1, F_2 和一个短的几乎平行类 S . 其中: ∞ 对应例 2 的洞 $|F_1| = 26, |F_2| = 12$. 把这些 26 圈放入 C 中, 注意到 F_1 中所有的 26 圈与洞 ∞ 的点相交, 但是 $F_2 \cup S$ 中的 26 圈与洞中的点不相交.

3) 对于 $a \in h_i, b \in h_j, h_i, h_j \in H, i \neq j$, 利用定理 2 将 $K_{26, 26}$ 划分为 13 个平行类, 每一类有两个 26 圈, 其中: $K_{26, 26}$ 的两部分点集为 $\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}$ 和 $\{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}$. 将这些 26 圈放入 C 中.

C 中的 26 圈系可划分为以下几乎平行类.

I) 对于每一个 $x, x \in Q$, 令 $\pi(x) = \{\{a, b\} \mid a \circ b = b \circ a = x\}$. 对洞 $h_1 = \{x_1, y_1\}$, 令 $\pi(x_1) = \{\{a_i, b_{q_i}\} \mid 1 \leq i \leq t-1\}$, $\pi(y_1) = \{\{c_{m_i}, d_{n_i}\} \mid 1 \leq i \leq t-1\}$, 其中: $\pi(x_1), \pi(y_1)$ 为 $X/\{x_1, y_1\}$ 的划分且 $\pi(x_1) \cap \pi(y_1) = \emptyset$ ^[7]. 排列来自 $K_{h_1 \times \{1, 2, \dots, 26\}} + \infty$ 和 $K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}$ 中的 26 圈, 其中: $\{a, b\} \in \pi(x_1)$ 和 $\{a, b\} \in \pi(y_1)$.

将 1) 中的任意 13 个几乎平行类和图 $K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}, \{a, b\} \in \pi(x_1)$ 中的 13 个几乎平行类配对; 将 1) 中剩余的 13 个几乎平行类与图 $K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}, \{a, b\} \in \pi(y_1)$ 中的 13 个平行类配对, 可得到 C 中的 26 个几乎平行类; 因此在 1) 中仍然剩余 14 个几乎平行类.

II) 对于每一个洞 $h_i = \{x_i, y_i\}, 2 \leq i \leq t$.

令 $\pi(x_i) = \{\{e_j, f_{q_j}\} \mid 1 \leq j \leq t-1\}$, $\pi(y_i) = \{\{g_{m_j}, h_{n_j}\} \mid 1 \leq j \leq t-1\}$, 其中: $\pi(x_i)$ 和 $\pi(y_i)$ 为 $X/\{x_i, y_i\}$ 的划分且 $\pi(x_i) \cap \pi(y_i) = \emptyset$ ^[7]. 排列图 $K_{h_i \times \{1, 2, \dots, 26\}} + K_{\infty, h_i \times \{1, 2, \dots, 26\}}$ 和 $K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}$ 中的 26 圈集, 其中: $\{a, b\} \in \pi(x_i)$ 和 $\{a, b\} \in \pi(y_i)$.

将 F_1 中的 13 个几乎平行类与图 $K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}, \{a, b\} \in \pi(x_i)$ 中的 个几乎平行类配对, 然后将 F_1 中剩余的 13 个几乎平行类与图 $K_{\{a\} \times \{1, 2, \dots, 26\}, \{b\} \times \{1, 2, \dots, 26\}}, \{a, b\} \in \pi(y_i)$ 中的 个几乎平行类配对, 共得到 $26(t-1)$ 个几乎平行类.

III) 现在已经穷尽了 3) 中的所有 26 圈, 剩余的圈集有 1) 中的 14 个几乎平行类, F_2 中 12 个几乎平行类和对每一个 $h_i, 2 \leq i \leq t$ 的 S 中的短平行类. 由于 F_2 中的几乎平行类与洞 ∞ 中的点不相交, 将 1) 中 12 个几乎平行类与每一个洞 $h_i, i \geq 2, F_2$ 中的 12 个几乎平行类配对. 则得到 C 中的 12 个几乎平行类.

IV) 目前剩余的是 1) 中的两个几乎平行类和每一个洞 $h_i, i \geq 2$ 中的短平行类. 将 1) 中的一个几乎平行类与每一个洞 $h_i, i \geq 2$ 中的短平行类配对. 则得到 C 中的一个几乎平行类包含 $t+1$ 个 26 圈. 最后

剩余的是 1)中的一个平行类包含两个圈,构成短平行类.

综上,得到 $\frac{n+11}{2}$ 个几乎平行类,一个短平行类包含 2 个 26 圈和另一个短平行类包含 $t+1=\frac{n+39}{52}$ 个 26 圈. 因此得到定理 3.

定理 3 阶为 n 的推广的几乎可分解的 26 圈系的谱为 $n\equiv 13(\bmod 52)$.

证明 例 1,3 考虑了阶为 65 和 117 的情况. $52t+3$ 的构造给出了每一个阶为 $n\equiv 13(\bmod 52)(n\geq 117)$ 的几乎可分解的 26 圈系. 因此,定理得证.

参考文献:

[1] ALSPACH B,GAVLAS H. Cycle decompositions of and[J]. J Combin Theory B Ser, 2001,81(1):77-99.
[2] SAJNA M. Cycle decompositions: Complete graphs and fixed length cycles[J]. J Combin Designs,2002,10(1):27-78.
[3] ALSPACH B,SCHELLENBERG P J,STINSON D R,et al. The Oberwolfach problem and factors of uniform odd length cycles[J]. J Combin Theory A Ser,1989,52(1):20-43.
[4] PIOTROWSKI W L. The solution of the bipartite analogue of the Oberwolfach problem[J]. Discrete Math,1991,97(3):339-356.
[5] VANSTONE S A,STINSON D R,SCHELLENBERG P J,et al. Hanani triple systems[J]. Israel J Math,1993,83(3):305-319.
[6] LINDNER C C,MESZKA M,ROSA A. Almost resolvable cycle systems: An analogue of Hanani triple systems[J]. J Combin Designs,2009,17(5):404-410.
[7] PETER A,ELIZABETH J B,HOFFMAN D G,et al. The generalized almost resolvable cycle system problem[J]. J Combin Math,2010,30(6):617-625.
[8] DEJTER I J,LINDNER C C,MESZKA M,et al. Almost resolcable 26-cycle systems[J]. J Combin Math Combin Computing,2007,63(2):173-182.
[9] LINDNER C C,RODGER C A. Design theory[M]. Bocaraton: CRC Press,1997:137-159.

Generalized Almost Resolvable 26-Cycle Systems

PU Li-qun¹, FANG Jia¹, MA Jun²

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China;
2. Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: By the method of differences, the paper considers the existence of generalized almost resolvable-cycle system with order n which is the extension of almost resolvable cycle system. It is proved that the necessary and sufficient condition for the existence of generalized almost resolvable 26-cycle system of order is $n\equiv 13(\bmod 52)$. Generalizing P. Adams' s method to construct 26GARCS(n), we also give its spectrum.
Keywords: cycle system; resolvability; almost resolvability cycle system; generalized almost resolvability cycle system; parallel class

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)