第 34 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 1
2013 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2013

文章编号：　1000-5013(2013)01-0106-06

一阶非线性脉冲微分方程两点边值问题的正解

陈应生，汪东树

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类一阶非线性脉冲微分方程边值问题的正解存在性. 利用锥压缩锥拉伸不动点定理及一些分析技巧，建立该边值问题存在一个及多个正解的充分条件，所得结果推广和改进了 LIU Yan-shang 的结果.

关键词： 锥；正解；脉冲；不动点理论

中图分类号： O 175.8　　**文献标志码：** A

脉冲微分方程边值问题是微分方程研究的焦点之一，近来很多文章研究一阶脉冲微分方程的边值问题[1-9]，文献 [1] 研究脉冲边值问题

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)+a(t)x(t)=f(t,x(t)), && t\in[0,T]\backslash\{t_1,\cdots,t_p\},\\ &\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k)=I_k(x(t_k)), && k=1,2,\cdots,p,\\ &x(T)=x(0) \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

的正周期解. 对于一阶脉冲微分方程周期边值问题

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)+a(t,x(t))x(t)=f(t,x(t)), && t\in[0,\omega]\backslash\{t_1,\cdots,t_p\},\\ &\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k)=I_k(x(t_k)), && k=1,2,\cdots,p,\\ &x(\omega)=qx(0). \end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中：$0=t_0<t_1<\cdots<t_p<t_{p+1}=\omega$；$q\geqslant 1$，$f:[0,\omega]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是脉冲 Caratheodory 函数；$I_k:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续函数；$a(t,x)$ 在 $[0,\omega]\times[0,+\infty)$ 上连续；$\alpha:[0,\omega]\to[0,\omega)$ 连续. 当 $a(t,x)=a(t)$，$q=1$ 时，对边值问题(2)的研究实际就是对边值问题(1)的研究. 本文利用一些分析技巧和锥上不动点定理，给出边值问题(2)存在一个或多个正解的充分条件.

1　基本定义与引理

假设 H_1) $a_1(t)\leqslant a(t,x)\leqslant a_2(t)$，$(t,x)\in[0,\omega]\times[0,+\infty)$，其中 $a_1(t)$，$a_2(t)$ 在 $[0,\omega]$ 上连续并且 $\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s>0$.

考察 Banach 空间 $X=PC([0,\omega],R)=\{x:[0,\omega]\to R\,|\,\{x(0)=qx(\omega)$，当 $t\in[0,\omega]\backslash\{t_1,\cdots,t_p\}$，$x(t)$ 连续；当 $t=t_k$，$x(t)$ 左连续，且 $x(t_k^+)$ 存在，$k=1,2,\cdots,p\}$. 定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$，$x\in X$.

定义 1　如果满足以下 3 个条件，函数 f 称为脉冲 Caratheodory 函数.

1) $f(\cdot,u)\in X$，$u\in R$；

2) $f(t,\cdot)$ 关于 t 连续，$t\in[0,\omega]\backslash\{t_1,\cdots,t_p\}$；

3) 对任意的 $m>0$，存在函数 $h_m t\in L^1[0,\omega]$，当 $0\leqslant u\leqslant m$，$|f(t,u)|\leqslant h_m(t)$，$t\in[0,\omega]\backslash\{t_1,\cdots,t_p\}$.

引理 1　假设 Ω_1 和 Ω_2 是 Banach 空间 X 上的有界开子集，且 $0\in\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$K$ 是 X 上的一个锥，算子 $T:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续的. 如果满足以下两个条件之一：

收稿日期： 2011-11-28

通信作者： 陈应生(1976-)，男，讲师，主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail：cyssheng@hqu.edu.cn.

基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

1）$\| Tx \| \leqslant \| x \|, x \in K \cap \partial\Omega_1$；$\| Tx \| \geqslant \| x \|, x \in K \cap \partial\Omega_2$；

2）$\| Tx \| \geqslant \| x \|, x \in K \cap \partial\Omega_1$；$\| Tx \| \leqslant \| x \|, x \in K \cap \partial\Omega_2$，

则 T 至少有一个不动点 $x \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

以下总假设：H_2）$f: [0,\omega] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$脉冲 Caratheodory 函数.

引理 2　若条件 H_1），H_2）成立，则对任意的 $u(t) \geqslant 0, u \in K$，边值问题(2)有唯一解，即

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s) f(s,x(s)) \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k) I_k(x(t_k)).$$

在上式中有

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{q \exp\left(\int_0^s a(r,x(r))\mathrm{d}r + \int_t^\omega a(r,x(r))\mathrm{d}r\right)}{q \exp\left(\int_0^\omega a(r,x(r))\mathrm{d}r\right) - 1}, & 0 \leqslant s < t \leqslant \omega, \\[2ex] \dfrac{\exp\left(\int_t^s a(r,x(r))\mathrm{d}r\right)}{q \exp\left(\int_0^\omega a(r,x(r))\mathrm{d}r\right) - 1}, & 0 \leqslant t < s \leqslant \omega. \end{cases}$$

定义函数为

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \dfrac{q \exp\left(\int_0^s a_1(r)\mathrm{d}r + \int_t^\omega a_1(r)\mathrm{d}r\right)}{q \exp\left(\int_0^\omega a_2(r)\mathrm{d}r\right) - 1}, & 0 \leqslant s < t \leqslant \omega, \\[2ex] \dfrac{\exp\left(\int_t^s a_1(r)\mathrm{d}r\right)}{q \exp\left(\int_0^\omega a_2(r)\mathrm{d}r\right) - 1}, & 0 \leqslant t < s \leqslant \omega, \end{cases}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{q \exp\left(\int_0^s a_2(r)\mathrm{d}r + \int_t^\omega a_2(r)\mathrm{d}r\right)}{q \exp\left(\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r\right) - 1}, & 0 \leqslant s < t \leqslant \omega, \\[2ex] \dfrac{\exp\left(\int_t^s a_2(r)\mathrm{d}r\right)}{q \exp\left(\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r\right) - 1}, & 0 \leqslant t < s \leqslant \omega. \end{cases}$$

这里 $a_1(t), a_2(t)$是满足条件 H_1）的函数. 令

$$a_1^-(t) = \min\{0, a_1(t)\}, \qquad a_2^+(t) = \max\{0, a_2(t)\}, \qquad t \in [0,\omega],$$

$$K_1 = \exp\left(\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r\right), \qquad K_2 = \exp\left(\int_0^\omega a_2(r)\mathrm{d}r\right),$$

$$M_1 = \exp\left(\int_0^\omega a_1^-(r)\mathrm{d}r\right), \qquad M_2 = \exp\left(\int_0^\omega a_2^+(r)\mathrm{d}r\right).$$

由假设 H_1）有 $1 < K_1 \leqslant K_2, M_1 \leqslant 1 < M_2$.

引理 3　假设条件 H_1），H_2）满足，则有

$$\frac{qM_1}{qK_2 - 1} \leqslant G_1(t,s) \leqslant G(t,s) \leqslant G_2(t,s) \leqslant \frac{qM_2}{qK_1 - 1}, \qquad x \in X, \quad (t,s) \in [0,\omega] \times [0,\omega].$$

定义 $K = \{x \in X: x(t) \geqslant \sigma \| x \|, t \in [0,\omega]\}$，其中 $\sigma = \dfrac{M_1(qM_1 - 1)}{M_2(qK_2 - 1)}$，易证 K 是 X 上的一个锥. 又定义算子

$$T: K \to X \text{ 为} (Tx)(t) = \int_0^\omega G(t,s) f(s,x(s)) \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k) I_k(x(t_k)), \qquad x \in K.$$

同文献[1]的证明类似，不难证明以下引理.

引理 4　假设条件 H_1），H_2）成立，则 $T: K \to K$.

引理 5　假设条件 H_1），H_2）满足，则 $T: K \to K$ 全连续.

引理 6 假设条件 H_1),H_2)成立,如果 $x=x(t)$是算子 $T:K\to K$ 的不动点,则可知 $x=x(t)$是边值问题(2)的解.

2 主要结果

引入以下记号,对于 $t\in[0,\omega]$,令

$$\varphi(r,t)=\max_{x\in[\sigma r,r]}\frac{f(t,x)}{x},\qquad \phi(r,t)=\min_{x\in[\sigma r,r]}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$\varphi_k(r)=\max_{x\in[\sigma r,r]}\frac{I_k(x)}{x},\qquad \phi_k(r)=\min_{x\in[\sigma r,r]}\frac{I_k(x)}{x},$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=\overline{f}_\infty(t),\qquad \liminf_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=\underline{f}_\infty(t),$$

$$\limsup_{x\to+0}\frac{f(t,x)}{x}=\overline{f}_0(t),\qquad \liminf_{x\to+0}\frac{f(t,x)}{x}=\underline{f}_0(t),$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant p}\frac{I_k(x)}{x}=\overline{I}_{k,\infty},\qquad \liminf_{x\to+\infty}\min_{1\leqslant k\leqslant p}\frac{I_k(x)}{x}=\underline{I}_{k,\infty},$$

$$\limsup_{x\to0^+}\max_{1\leqslant k\leqslant p}\frac{I_k(x)}{x}=\overline{I}_{k,0},\qquad \liminf_{x\to0^+}\min_{1\leqslant k\leqslant p}\frac{I_k(x)}{x}=\underline{I}_{k,0}.$$

定理 1 假设条件 H_1),H_2)成立,且存在 $R,r>0$,使得以下两个条件满足:

Ⅰ) $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\varphi(R,s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\varphi_k(R)\}<1$,

Ⅱ) $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^\omega G_1(t,s)\phi(r,s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\phi_k(r)\}>1$.

则边值问题(2)至少有一个正解 $x^*(t)$,满足 $\min(r,R)\leqslant\|x^*\|\leqslant\max(r,R)$.

证明 设 $R>r>0$,考虑定义的算子 $T:K\to X$,由引理 5 可得算子 $T:K\to K$ 是全连续的.

令 $\Omega_2=\{x\in X:\|x\|<R\}$,对于 $x\in\partial\Omega_2\cap K$,有 $0<\sigma R=\sigma\|x\|\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=R$,所以有

$$0\leqslant(Tx)(t)\leqslant R\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\varphi(R,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\varphi_k(R)\}\leqslant R.$$

因此,$\|Tx\|\leqslant\|x\|,x\in\partial\Omega_2\cap K$.

令 $\Omega_1=\{x\in X:\|x\|<r\}$,$x\in\partial\Omega_1\cap K$,因此 $0<\sigma r=\sigma\|x\|\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=r$,所以有

$$(Tx)(t)\geqslant\min_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_1(t,s)\varphi(r,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\varphi_k(r)\}\sigma r\geqslant r,t\in[0,\omega].$$

因此,$\|Tx\|\geqslant\|x\|,x\in\partial\Omega_1\cap K$.

故引理 1 的条件满足,算子 T 至少有一个不动点 $x^*\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$,即 $x^*=x^*(t)$是边值问题(2)的一个正解.且 $r\leqslant\|x^*\|\leqslant R$.

推论 1 假设条件 H_1),H_2)成立,且存在 $R>r>0$,使得以下两个条件满足:

Ⅰ) $\frac{qM_2}{qK_1-1}\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega\varphi(R,s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}\varphi_k(R)\}<1$,

Ⅱ) $\frac{qM_1\sigma}{qK_2-1}\min\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega\varphi(r,s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}\varphi_k(r)\}>1$,

则边值问题(2)至少有一个正解.

推论 2 假设条件 H_1),H_2)成立,且以下两个条件满足:

Ⅰ) $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\overline{f}_\infty(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}\overline{I}_{k,\infty}G_2(t,t_k)\}<1$,

Ⅱ) $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^\omega G_1(t,s)\underline{f}_0(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}\underline{I}_{k,0}G_1(t,t_k)\}>1$,

则边值问题(2)至少有一个正解 .

证明 由 $\overline{f}_\infty(t)$,$\overline{I}_{k,\infty}$及 $\underline{f}_0(t)$,$\underline{I}_{k,0}$的定义,可得存在 $0<r/\sigma<R$,使得

$$\varphi(R,t)\leqslant \overline{f}_{\infty}(t),\varphi_k(R)\leqslant \overline{I}_{k,\infty},$$
$$\phi(r,t)\geqslant \underline{f}_0(t),\varphi_k(r)\geqslant \underline{f}_{k,0}.$$

所以定理 1 中的条件Ⅰ)，Ⅱ)成立，故边值问题(2)至少有一个正解 $x^*(t)$.

推论 3　假设条件 H_1)，H_2)成立，且以下两个条件满足：

Ⅰ) $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^{\omega}G_2(t,s)\overline{f}_0(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}\overline{I}_{k,0}G_2(t,t_k)\}<1$,

Ⅱ) $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^{\omega}G_1(t,s)\underline{f}_{\infty}(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}\underline{I}_{k,\infty}G_1(t,t_k)\}>1$,

则边值问题(2)至少有一个正解 $x^*(t)$.

注 1　推论 2,3 比文献[1]中的定理 3.1.1,3.1.2 的应用范围更广范且条件更弱. 显然,文中两个推论都是定理 1 的特殊情况,所以文中推广了文献[1]中定理 1 的结果.

定理 2　如果条件 H_1)，H_2)成立，且存在 $2n+1$ 个数 $0<r_1<r_2<\cdots<r_{2n+1}$，使以下两个条件之一满足：

Ⅰ) $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^{\omega}G_2(t,s)\varphi(r_{2i-1},s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\varphi_k(r_{2i-1})\}<1,i=1,2,\cdots,n+1$，且 $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^{\omega}G_1(t,s)\phi(r_{2i},s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\phi_k(r_{2i})\}>1,i=1,2,\cdots,n$,

Ⅱ) $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^{\omega}G_1(t,s)\phi(r_{2i-1},s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}G_1t,t_k)\phi_k(r_{2i-1})\}>1,i=1,2,\cdots,n+1$，且 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^{\omega}G_2(t,s)\varphi(r_{2i},s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\varphi_k(r_{2i})\}<1,i=1,2,\cdots,n$,

则边值问题(2)至少有 $2n$ 个正解 $x_i^*(t)\in K$，满足 $r_1\leqslant\|x_1^*\|\leqslant r_2,r_{2n}\leqslant\|x_{2n}^*\|\leqslant r_{2n-1},r_i\leqslant\|x_i^*\|\leqslant r_{i+1}(i=2,3,\cdots,2n-1)$.

证明　以定理 2 条件Ⅰ)中的 $n=2$ 为例 .

1) 令 $\Omega_3=\{x\in X:\|x\|<r_3$，对于 $x\in\partial\Omega_1\cap K$，同定理 1 证明有

$$0\leqslant(Tx)(t)\leqslant r_3\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^{\omega}G_2(t,s)\varphi(r_3,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\varphi_k(r_3)\}\leqslant r_3.$$

因此 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，$x\in\partial\Omega_3\cap K$.

2) 令 $\Omega_2=\{x\in X:\|x\|<r_2\}$，$x\in\partial\Omega_2\cap K$，因此有 $0\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=r_2$，故有

$$(Tx)(t)\geqslant\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^{\omega}G_1(t,s)\phi(r_2,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\phi_k(r_2)\}\sigma r_2\geqslant r_2,$$

故而 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$，$x\in\partial\Omega_2\cap K$. 所以定理 2 的条件满足，故而算子 T 至少有一个不动点 $x_2^*\in K\cap(\Omega_3\backslash\Omega_2)$，即 $x_2^*=x_2^*(t)$是边值问题(2)的一个正解，且 $r_2\leqslant\|x_2^*\|\leqslant r_3$.

3) 令 $\Omega_1=\{x\in X:\|x\|<r_1$，对于 $x\in\partial\Omega_1\cap K$，同定理 1 证明有

$$0\leqslant(Tx)(t)\leqslant r_1\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^{\omega}G_2(t,s)\varphi(r_1,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\varphi_k(r_1)\}\leqslant r_1.$$

因此 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，$x\in\partial\Omega_1\cap K$. 所以定理 1 的条件满足，故而算子 T 至少有一个不动点 $x_1^*\in K\cap(\Omega_2\backslash\Omega_1)$，即 $x_1^*=x_1^*(t)$是边值问题(2)的一个正解，且 $r_1\leqslant\|x_1^*\|\leqslant r_2$.

推论 4　若条件 H_1)，H_2)成立，且 $\lambda\max\limits_{t\in J}\int_0^{\omega}G_2(t,s)\mathrm{d}s,\mu=\max\limits_{t\in J}\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)$，若下列两个条件满足：

Ⅰ) $\lambda\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\overline{f}_{\infty}(t),\overline{f}_0(t)\}+\mu\max\sum\limits_{k=1}^{p}\{\overline{I}_{k,\infty},\overline{I}_{k,0}\}<1.$

Ⅱ) 存在常数 $u_0>0$ 和非负函数 $h\in X$，使得

$$f(t,x)\geqslant h(t)u_0,\qquad t\in[0,\omega],\quad x\geqslant u_0,$$
$$\min_{t\in[0,\omega]}\sigma\int_0^{\omega}G_1(t,s)h(s)\mathrm{d}s>1.$$

则边值问题(2)至少有两个正解 $x_1^*(t),x_2^*(t)\in K$ 满足 $r\leqslant\|x_1^*\|\leqslant u_0/\sigma\leqslant\|x_2^*\|\leqslant R$.

证明 由条件Ⅰ),同推论4的证明得存在 $R>u_0/\sigma>r>0$,使得

$$\varphi(R,t)\leqslant\bar{f}_\infty(t),\qquad \varphi(R)\leqslant\bar{I}_{k,\infty}\varphi(r,t)\leqslant\bar{f}_0(s),\qquad \varphi_k(r)\leqslant\bar{I}_{k,0}.$$

故而有

$$\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\varphi(R,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_2(t,t_k)\varphi_k(R)\}<1,$$

且

$$\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\varphi(r,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_2(t,t_k)\varphi_k(r)\}<1$$

成立.又由推论4的条件Ⅱ)可得 $\phi(u_0/\sigma,s)\geqslant h(t)$,从而有

$$\max_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^\omega G_1(t,s)\phi(u_0/\sigma,s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_1(t,t_k)\phi_k(u_0/\sigma)\}\geqslant\min_{t\in[0,\omega]}\sigma\int_0^\omega G_1(t,s)h(t)\mathrm{d}s>1.$$

由定理2可得边值问题(2)至少有两个正解满足 $x_1^*(t),x_2^*(t)$,且 $r\leqslant\|x_1^*\|\leqslant u_0/\sigma\leqslant\|x_2^*\|\leqslant R$.

注2 推论4比文献[1]中的定理3.2.1的应用范围更广范且条件更弱.因此,文中的定理2大大推广和改进了文献[1]中的定理3.2.1的结果.

定理3 若条件 $H_1)$,$H_2)$成立,且存在 $2n$ 个数 $0<r_1<r_2<\cdots<r_{2n}$,使得以下条件之一满足:

Ⅰ) $\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\varphi(r_{2i-1},s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_2(t,t_k)\varphi_k(r_{2i-1})\}<1,i=1,2,\cdots,n$, 且 $\min_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^\omega G_1(t,s)\phi(r_{2i},s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_1(t,t_k)\phi_k(r_{2i})\}>1,i=1,2,\cdots,n$,

Ⅱ) $\min_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^\omega G_1(t,s)\phi(r_{2i-1},s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_1t,t_k)\phi_k(r_{2i-1})\}>1,i=1,2,\cdots,n$, 且 $\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)\varphi(r_{2i},s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^p G_2(t,t_k)\varphi_k(r_{2i})\}<1,i=1,2,\cdots,n$,

则边值问题(2)至少有 $2n-1$ 个正解 $x_i^*(t)\in K$,满足 $r_i\leqslant\|x_i^*\|\leqslant r_{i+1}$,$i=1,2,3,\cdots,2n-1$.

证明与定理2类似.

3 例子

对于边值问题

$$\left.\begin{aligned}&x'(t)+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t+1})\frac{1+x^2(|\sin 3t|)}{2+x^2(|\sin 3t|)}x(t)=f(t,x(t)),\quad t\in[0,1]\backslash\{0.5\},\\&\Delta x(0.5)=x(0.5^+)-x(0.5)=I(x(0.5)),\\&x(1)=x(0).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中:$f(t,x)=\begin{cases}0.05\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}, & x\in[0,1],\\ 8\mathrm{e}^{t/2}x^2, & 1<x\leqslant 20,\\ 0.05\mathrm{e}^{-t}x^{3/2}, & x>20.\end{cases}$ $t\in[0,1]$, $I(x)=0.05\sqrt{x}|\sin x|$, $x\geqslant 0$,

$\omega=1,p=1,t_1=\frac{1}{2}a(t,x)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t+1})\frac{2+x^2(|\sin 3t|)}{3+x^2(|\sin 3t|)}$, $t\in[0,1]$, $x\geqslant 0$,

令 $a_1(t)=1/2$,$a_2(t)=1$,则 $a_1(t)\leqslant a(t,x)\leqslant a_2(t)$,$x\geqslant 0$.经计算可得 $K_1=\sqrt{\mathrm{e}}$,$M_1=1$,$K_2=M_2=\mathrm{e}$,$\frac{1}{\mathrm{e}-1}\leqslant G_1(t,s)\leqslant G_2(t,s)\leqslant\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}$,$\sigma=\frac{1}{\mathrm{e}(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$,$\varphi_1(r)=\frac{1}{20\sqrt{\sigma r}}$,$\phi_k(r)=0$.

当 $0<\sigma r\leqslant x\leqslant r\leqslant 1$ 时,$\varphi(r,t)=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{20\sqrt{\sigma r}}$;当 $0<\sigma r\leqslant x\leqslant r\leqslant 20$ 时,$\phi(r,t)=8\mathrm{e}^{1/2t}\sqrt{\sigma r}$;当 $1<\sigma r\leqslant x\leqslant r\leqslant 20$ 时,$\phi(r,t)=8\mathrm{e}^{t/2}\sqrt{\sigma r}$;当 $20<\sigma r\leqslant x\leqslant r\leqslant+\infty$ 时,$\varphi(r,t)=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{20}\sqrt{r}$.取 $r_1=1$,$r_2=15$,$r_3=25$,则有

$$\max_{t\in[0,\omega]}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(r_1,s)\mathrm{d}s+G_2(t,t_1)\varphi(r)\leqslant\max_{t\in[0,\omega]}\frac{1}{20\sqrt{\sigma}}[\frac{t\mathrm{e}^{(1-t)}+(1-t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}+\frac{\mathrm{e}}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}]<1.$$

$$\min_{t\in[0,\omega]}\sigma\{\int_0^\omega G_1(t,s)\phi(r_2,s)\mathrm{d}s+G_1(t,t_1)\phi_1(r_2)\}\geqslant\min_{t\in[0,\omega]}8\frac{r_2\sigma^2}{\mathrm{e}-1}[\mathrm{e}^{(1/2(1-t)}(\mathrm{e}^t-1)+\mathrm{e}^{-t/2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^t)]>1.$$

$$\max_{t\in[0,\omega]}[\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(r_3,s)\mathrm{d}s+G_2(t,t_1)\varphi(r_3)]\leqslant$$

$$\max_{t\in[0,\omega]}\frac{1}{20}[\frac{t\mathrm{e}^{(1-t)}+\mathrm{e}^{-t}(1-t)}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}\sqrt{r_3}+\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\sigma r_3}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}]<1.$$

因此，由定理 3 得边值问题(3)至少有两个正解. $x_1^*(t)$，x_2^* 满足 $1\leqslant\|x_1^*\|\leqslant 15\leqslant\|x_2^*\|\leqslant 25$.
这里 $\overline{f}_\infty=\underline{f}_\infty=+\infty$；$\overline{f}_0=\underline{f}_0=+\infty$，故不能用文献[1]中的定理 3.2.1 来判断本例解的情况.

参考文献：

[1] LIU Yu-ji. Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(5): 2106-2122.

[2] LI Jian-li, SHEN Jian-hua. New comparison results for impulsive functional differential equations[J]. Appl Math Lett, 2010, 23(4): 487-493.

[3] ZHAO Ai-min, BAI Zheng-guo. Existence of solutions to first-order impulsive periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(5/6): 1970-1977.

[4] ZHANG Li-hong. Boundary value problem for first order impulsive functional integeo-differential equations[J]. Comput Appl Math, 2011, 235(8): 2442-2450.

[5] LIU Yan-shang. Periodic boundary value problems for first order functional differential equations with impulse[J]. J Comput Appl Math, 2009, 223(1): 27-39.

[6] LIANG Rui-xi, SHEN Jian-hua. Periodic boundary value problem for first order impulsive functional differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2007, 202(2): 498-510.

[7] ZHANG Li-hong. Boundary value problem for first order impulsive integro-differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2011, 235(8): 2442-2450.

[8] 韩飞，王全义. 一类泛函微分方程周期正解个数[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2009，30(3)：346-350.

[9] LI Jian, LUO Zhi-guo. Maximum principles for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72(9/10): 3837-3841.

Positive Solutions of Impulsive Boundary Value Problems for First-Order Two-Point Nonlinear Functional Differential Equations

CHEN Ying-sheng, WANG Dong-shu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the problem on the existence of positive solutions for a class of the first-order nonlinear functional differential equations with impulsive boundary value problems. By using the cone compression, the extended fixed point theorm and some analysis techniques, we establish some sufficient conditions for the existence of one and multiple positive solutions for these problems. Our results generalize and improve some previous results made by LIU Yan-shang.

Keywords: cone; positive solution; impulse; fixed point theory

（**责任编辑：**黄晓楠　　**英文审校：**黄心中）