

文章编号 1000-5013(2006)01-0058-03

圆锥模拉拔问题的下限解析解

彭 兴 黔

(华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 金属材料通过阴模拉拔加工,因速度场方法的数学分析较为简单,所以常用其求解拉拔加工问题.基于材料的物理非线性,求解其平衡微分方程数学难度较大,较少采用应力法求解.文中忽略较小剪应力对材料屈服的影响,求解出圆锥模拉拔问题的下限应力解.算例的结果介于速度场上限解析解和应力场近似解之间,表明文中的应力解析解更为合理,可供塑性拉拔加工工程参考.

关键词 圆锥模, 拉拔, 解析解, 塑性加工

中图分类号 TG 356; TG 302 **文献标识码** A

对棒材或线材通过阴模拉拔加工,一般采用速度场方法或应力场方法求解.速度场方法的研究进展很快,较早就有了圆锥模拉拔的上限解析解^[1],现已求解出了抛物线模拉拔的上限解析解^[2-3].由于材料的物理非线性,求解其平衡微分方程的数学难度较大,至今尚未有应力场方法的下限解析解,而仅局限于数值分析^[4]和近似简化计算^[5].本文忽略拉拔时较小剪应力对屈服条件的影响,求解出了圆锥模拉拔问题的下限应力解析解.

1 问题的提出及求解

圆柱物通过圆锥模的拉拔加工,如图 1 所示.在求解时,作两点假设:(1)金属是无硬化的理想刚塑性材料.(2)金属在圆锥模孔中的塑性变形均指向圆锥顶点 O 作定向流动,且是稳定的.这样,由拉拔状况可知此为球坐标下的轴对称问题,其平衡方程为

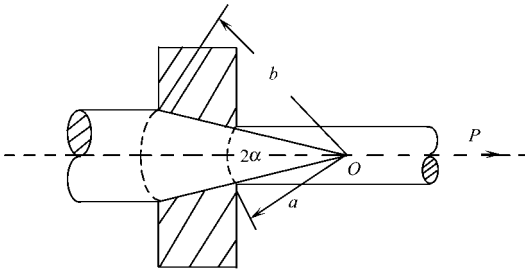


图 1 圆材通过圆锥模的拉拔图

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{\tau_{r\theta}}{r} \cot \theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \sigma_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

材料的屈服条件可采用 Tresca 或 Mises 屈服条件.为使方程求解方便,在剪应力 $\tau_{r\theta}$ 较小时,忽略其对屈服的影响,则屈服条件为

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_s. \tag{2}$$

设 $\tau_{r\theta}$ 可分离变量,即

$$\tau_{r\theta} = \alpha \Theta(\theta) R(r). \tag{3}$$

将式(2),(3)代入方程(1),整理可得

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \alpha_s [R(\theta + \Theta \cot \theta) + 2] &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \alpha \Theta(rR' + 3R) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

将式(4)的第 1 式对 θ 求偏导, 第 2 式对 r 求偏导再乘 r , 两式相减后, 可得

$$R(\Theta'' + \Theta' \cot \theta - \Theta \csc^2 \theta) - \Theta(r^2 R'' + 4rR') = 0. \tag{5}$$

整理得

$$\frac{r^2 R'' + 4rR'}{R} = \frac{\Theta'' + \Theta' \cot \theta - \Theta \csc^2 \theta}{\Theta} = L, \tag{6}$$

在式(6)中, L 为常数. 只在 $L = -2$ 时, 式(6)才唯一有解, 其解为

$$\left. \begin{aligned} \Theta(\theta) &= \sin \theta, \\ R(r) &= c_1 r^{-2} + c_2^{-1}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

将式(7)代入式(4)积分并比较两式, 得

$$\alpha = -\alpha_s [2 \ln r + c_3 - (c_1 r^{-2} + c_2^{-1}) \cos \theta], \tag{8}$$

式(8)中 c_1, c_2, c_3 均为积分常数. 考虑无后拉力时, 即 $(\alpha)_{r=b} = 0$, 有

$$c_1 = -2c_2 b, \quad c_3 = -2 \ln b. \tag{9}$$

将式(9)代入式(7), (8)中, 并由式(2), (3)整理(记 $c_2 = c$), 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \alpha_s [2c(r^{-1} - br^{-2}) \cos \theta + 2 \ln b/r], \\ \sigma_\theta &= \alpha_s [2c(r^{-1} - br^{-2}) \cos \theta + 2 \ln b/r - 1], \\ \tau_{\theta} &= \sigma_r c(r^{-1} - 2br^{-2}) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

由式(10)可知是满足 $(\tau_{\theta})_{\theta=0}$ 的轴对称条件, 而常数应由锥壁接触摩擦条件来确定. 又由式(10)可知, 在锥壁处, 即 $\theta = \alpha$, τ_{θ} 不为常数且与 σ_θ 的比值也不为常数(在以往求解问题时, 均假定 $(\tau_{\theta})_{\theta=\alpha}$ 为常数), 表明了接触摩擦的复杂性. 如何确定 c 为问题难点之一^[6~8], 通常 c 由实验测定. 在此, 分两种方式来确定常数 c . (1) 按平均摩擦概念, 即

$$f = - \frac{\int_s (\tau_{\theta})_{\theta=\alpha} ds}{\int_s (\sigma)_{\theta=\alpha} ds}. \tag{11}$$

在式(11)中, s 为整个锥孔接触面积, f 为摩擦系数, τ_{θ} 为压应力, 故加一负号. 经计算可得

$$c = - \frac{fa^2 \ln \frac{b}{a}}{2b(\sin \alpha + f \cos \alpha) \ln \frac{b}{a} - (b-a)(\sin \alpha + 2f \cos \alpha)}. \tag{12}$$

(2) 在材料刚进入锥孔咬合时, 计算局部摩擦力

$$f = - \frac{(\tau_{\theta})_{r=b, \theta=\alpha}}{(\sigma)_{r=b, \theta=\alpha}}, \tag{13}$$

则

$$c = - \frac{fb}{\sin \theta} \tag{14}$$

由式(12), (14)两式可知, 当摩擦系数为零时, 该问题则为较简单的球对称问题. 记出口处最大拉拔应力为 σ_f , 将式(12), (14)两式代入式(10)的第 1 式, 整理后得

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_s} = 2 \left[1 + \frac{(\frac{b}{a} - 1)}{N} f \right] \ln \frac{b}{a}, \tag{15}$$

上式中, $N = 2 \frac{b}{a} (\sin \alpha + f \cos \alpha) - (\frac{b}{a} - 1)(\sin \alpha + 2f \cos \alpha)$, 则

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_s} = 2 \left[\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} \right) \frac{f}{\sin \alpha} + \ln \frac{b}{a} \right]. \tag{16}$$

当 $\sigma_f > \sigma_s$ 时, 式(15), (16)两式不再适用, 即极限道次加工率满足 $\sigma_f/\sigma_s \leq 1$.

2 算例的比较和分析

一圆锥模孔半锥角 $\alpha = 12^\circ$, 摩擦系数 $f = 0.1$, 在进锥口直径 $D = 8 \text{ mm}$ 和出锥口材料直径 $d = 7$

mm 情况下, 计算拉拔应力. 按文〔1〕圆锥模拉拔应力公式, 可近似计算为

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = 2g(\alpha)\ln\left(\frac{D}{d}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \cot\alpha + m\cot\alpha \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)\right], \tag{17}$$

在式(17)中, $m \approx f = 0.1$, $g(\alpha) = 1.0009$, 则可得

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = 0.502. \tag{18}$$

按文〔5〕圆锥模拉拔应力近似计算, 可得

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = \frac{1+f\cot\alpha}{f\cot\alpha}\left[1 - \left(\frac{D}{d}\right)^{2f\cot\alpha}\right] = 0.369. \tag{19}$$

按本文(15), (16)两式计算, 分别得

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = 0.374, \quad \frac{\sigma_r}{\sigma_s} = 0.424. \tag{20}$$

上述算例表明, 按平均摩擦计算的结果与文〔5〕应力场的简化计算结果很吻合; 按材料在进锥口按局部摩擦定律计算的结果, 介于文〔5〕与文〔1〕计算结果之间, 计算结果较为理想.

3 结 束 语

- (1) 忽略剪应力 τ_0 对屈服的影响, 可求得应力场的下限解析解. (2) 作为应力场下限求解, 本文式(16)的计算结果较为理想. (3) 常数的取值有待于实验测定. (4) 本文的分析计算可供拉拔加工参考. (5) 本文的分析对挤压问题同样适用.

参 考 文 献

1 Avitzur B. Metal forming processes and analysis[J]. New York: McGraw Hill Book Co, 1968. 154~ 160
2 赵德文, 刘相华, 王国栋. 抛物线模轴对称拉拔曲面积分问题[J]. 东北大学学报(自然科学版), 1995, 16(2): 145~ 151
3 赵德文, 刘相华, 王国栋. 抛物线模拉拔方棒的上界解析解[J]. 力学与实践, 1996, 18(4): 20~ 23
4 王 仁, 熊祝华, 黄文彬. 塑性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1982. 372~ 380
5 徐秉业. 塑性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988. 270~ 276
6 吴承伟. 粗糙表面接触研究进展[J]. 力学进展, 1991, 21(1): 96~ 108
7 薛群基, 张 军. 微观摩擦学研究进展[J]. 摩擦学报, 1994, 14(4): 360~ 369
8 闫小青, 扶名福. 锥形模圆柱体挤压非局部摩擦问题[J]. 南昌大学学报(工科版), 2003, 25(3): 10~ 12

Lower Bound Analytic Solution to the Drawing
through Circular Cone Dies
Peng Xingqian

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Due to the simplicity of the velocity field method in mathematical analysis, the method of velocity field is generally adopted to solve the equation of drawing metal material. Owing to the physical nonlinearity of material, it is difficult to solve stress differential equation, so the stress method is seldom adopted. Neglecting small effect of shear stress on the yield criterion, the lower bound of stress analytic solution to the drawing through dies of circular cone is obtained. The calculation result is in the range of the upper bound analytic solution of velocity field and approximate solution of stress field, showing that this method is more reasonable, may serve as a reference for the plastic processing of drawing.

Keywords circular die, drawing, analytic solution, plastic processing