第24卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.24 No.2
2003年2月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr.2003

文章编号 1000-5013(2003)02-0194-07

最小 Hamilton 圈问题的求解新方法

张 银 明

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362011)

摘要 最小 Hamilton 圈可以用于求解货郎担问题, 但至今没有一种有效的求解最小 Hamilton 圈的方法. 文中提出元素判别值分配法是求解该问题的一个有效方法, 可将其应用于求解最小 Hamilton 圈的算法设计.

关键词 Hamilton 圈, 元素判别值分配法, 算法设计

中图分类号 O 22 文献标识码 A

运筹学中的货郎担问题是一个引起诸多学者兴趣并进行研究的问题. 对它的求解, 已提出不少有效的方法. 其中一种著名的求解方法, 就是通过求一条总权最小的 Hamilton 圈或称最小 H-圈的方法. 然而到目前为止, 对于这个问题仍没有一个有效的算法[1]. 由 Lin, Held 和 Karp 提出的近似解法[1]在对所举的例子进行求解时, 需要做 3 次调整, 方能得到最优通路. 如果使用元素判别值分配法[2~3]求解最小 H-圈, 只需一次分配便可获最优方案, 无须调整. 因此, 它是求解哈密尔顿最优通路的有效新方法, 有其独特的创新性.

1 运筹学的货郎担问题

运筹学的货郎担问题一般可叙述为, 有 n 个地点 A_i, 从 A_i 到 A_j 的耗费(时间、单位运费、距离及其它耗费)为 C_{ij}, 其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 要求耗费最小的调配方案, 可归结成线性规划问题. 假设 X_{ij} 表示 A_i 到 A_j 的调配待定变量, 不妨称为元素, 则其数学模型可表示为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}, \tag{1}$$

约束条件为

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = n, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = n, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{3}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{从 } A_i \text{ 城到 } A_j \text{ 城(该元素得到调配或被选上)}, \\ 0 & \text{不从 } A_i \text{ 城到 } A_j \text{ 城(该元素得不到调配或未被选上)}. \end{cases} \tag{4}$$

这类问题的调配可使用一般形式的调运分配表. 对于货郎担或排序问题, 是一般调运问题的特例, 即 $m = n$. 因而, 可简单地表示成调配分配图, 如图 1 所示.

收稿日期 2002-10-10 作者简介 张银明(1939-), 男, 教授

$C_{ij}=C_{ji}$是对称的货郎担问题, 而 $C_{ij}\neq C_{ji}$则是不对称的货郎担问题. C_{ij}所在格子的对应待定变量 X_{ij}, 称为元素. 此类问题可使用元素判别值分配法求解[4].

地点名	A_1	A_2	…	A_n	地点数
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nn}	1
地点数	1	1	…	1	N

图 1　货郎担问题一般调配分配图

1. 1　元素判别值的数学模型

计算 X_{ij}的元素判别值的数学模型[5]为

$$dX_{ij}=\sum_{s=1}^{(m-1)(n-1)} f_s(\triangle X_{ij})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_s(C_{ij}-C_{i,j+k}+C_{i+l,j+k}-C_{i+l,j}),\tag{5}$$

其中 $1-i\leq l\leq m-i$ 且 $l\neq0$, $1-j\leq k\leq n-j$ 且 $k\neq0$, $\triangle X_{ij}=C_{ij}-C_{i,j+k}+C_{i+l,j+k}-C_{i+l,j}$为元素 X_{ij}的矩形回路检验数. $i=1,2,\cdots,m$, $1-i\leq l\leq m-i$ 且 $l\neq0$, $j=1,2,\cdots,n$, $1-j\leq k< \leq n-j$ 且 $k\neq0$. 而$f_s(\triangle X_{ij})$是如下的定义函数. 即

$$f_s(\triangle X_{ij})=\begin{cases}1, & \text{当 } \triangle X_{ij}<0,\\ 0, & \text{当 } \triangle X_{ij}\geq 0.\end{cases}\tag{6}$$

对一般具有 $m\times n$ 阶调配平衡表中, 含有 $m\times n$ 个元素. 每个元素以它为顶点的矩形回路计有 $(m-1)(n-1)$ 个, 因而其判别值 $dX_{ij}\in[0,(m-1)(n-1)]$. 按照元素判别值进行调配的求解方法, 称为元素判别值分配法.

1. 2　元素 $\boldsymbol{X_{ij}}$的总检验数计算模型

元素 X_{ij}所有矩形回路的检验数之和, 称为元素 X_{ij}的总检验数. 记作 ZX_{ij}. 其总检验数的数学模型为

$$ZX_{ij}=\sum\Delta X_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(C_{ij}-C_{i,j+k}+C_{i+l,j+k}-C_{i+l,j}),\tag{7}$$

其中 $1-i\leq l\leq = m-i$ 且 $l\neq0$, $1-j\leq k< \leq n-j$ 且 $k\neq0$.

1. 3　元素判别值分配法的调配原则

对原来元素判别值分配法的调配基本原则[2], 经过求解问题的检验, 原第 3 条分配原则必须进行修改[3], 以保证一次调配便可获得最优解. 现将完善后的货郎担问题求解的调配原则进行叙述.

原则1　判别值越大，其分配的优先级越高.

原则2　当对某元素 X_{ij} 进行分配或选上后，则将该元素置为 $X_{ij}=1$，并将它的对应元素 X_{ji} 标上'×'(不允许出现 X_{ij}–X_{ji} 回路)，且将该元素所的 i 行及 j 列标上记号'√'.

原则3　若有多个元素的判别值相同，则元素总检验数小的先分配. 如果元素总检验数也相同，则耗费小的优先分配，再按下标的顺序进行分配.

原则4　当某行或某列已经具有标记'√'或某元素含有'×'时，那么处于该行或该列的元素及标记为'×'的元素，不论判别值多大，皆已失去分配权.

1.4　对角线上元素耗费值的设置

货郎担(或旅行商)问题是一般调配问题的特例，即 $M=N$. 而且，因为不允许从 A_i 到 A_i，故要使 C_{ii} 具有足够大的正数，在求解程序的计算元素判别值部分，是按所有耗费值最大数的2倍计算的，即

$$C_{ii}=r\times\max(C_{ij}),\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n,$$

r 可以取大于等于2的任何值. 经过求解实验的检验，程序计算中取 $R=2$. 这样取值，既可以使对角线上的元素具有足够大的正数，又不会使求解中使用的矩形回路检验数总和的数值太大. 当然，只要它们取足够大，并不影响求解的最后结果，即最优解是一样的.

2　Hamilton 圈的求解算法

使用元素判别值分配法求解哈密尔顿圈问题的算法，为便于说明，不妨以文献[]中的货郎担问题为例. 某食品厂要将产品送往6个零售点，要求所花费时间最省的行驶路线. 文献[]使用最小H–圈的方法. 相应的含有6个顶点的赋权完全图，如图2所示.

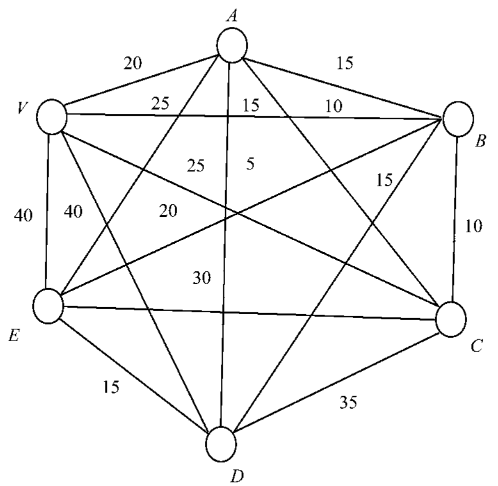

图2　赋权完全图

2.1　Hamilton 圈的表上求解算法

第1步. 将赋权完全图转换为调配图，其结果如图3所示. 图中各元素格中左上角的数字，表示从一个点到另一个点所需的时间(min)或称耗费，即为 C_{ij}. 第2步. 求元素判别值、元素总检验数. (1) 计算并给 C_{ii} 赋值，$C_{ii}=2\times\max(C_{ij})=80$. (2) 按元素判别值的数学模型(5)，计算各个元素的元素判别值 dX_{ij}，并填入图3各元素的右上角. (3) 按计算元素总检验数的计算模型(7)，计算各个元素的总检验数 ZX_{ij}，填入图3各元素的右下角. 第3步. 进行调配，即求解. 为便于求解过程进行标记，故除去各个元素的命名 X_{ij}. 其调配图如图4所示. (1) 元素判别值最大且总检验数最小的元素为 X_{62}(虽然有3个的元素判别值都为20，但 X_{62} 的总检验数最小). 即 $dX_{62}=20$，$ZX_{62}=-760$，因而在 X_{62} 格子的左下角标上第1次选择的记号'1'. 将对称点的元素 X_{26} 标上'×'，且将第6行和第2列标上'√1'('1'和'√1'中的数字是为了表明被选择的顺序而加上的). (2) 余下未分配并有调配权，且元素判别值最大及总检验数最小的元素为 X_{54}，即 $dX_{54}=20$，$ZX_{54}=-730$. 同样，在 X_{54} 格子的左下角标上第2次选择的记号'2'. 将对称元素

零售点	A	B	C	D	E	V	零售点数
A	80 0 X_{11} 2 030	15 10 X_{12} -190	15 15 X_{13} -460	5 19 X_{14} -790	25 13 X_{15} -190	20 15 X_{16} -400	1
B	15 10 X_{21} -250	80 0 X_{22} 2 210	10 14 X_{23} -580	15 15 X_{24} -370	20 14 X_{25} -310	10 20 X_{26} -700	1
C	15 17 X_{31} -520	10 15 X_{32} -580	80 0 X_{33} 1 670	35 10 X_{34} 80	30 14 X_{35} -220	25 17 X_{36} -430	1
D	5 19 X_{41} -850	15 15 X_{42} -370	35 10 X_{43} 80	80 0 X_{44} 1 730	15 19 X_{45} -730	40 13 X_{46} -57	1
E	25 14 X_{51} -250	20 14 X_{52} -310	30 15 X_{53} -220	15 20 X_{54} -730	80 0 X_{55} 1 490	40 11 X_{56} 20	1
V	30 12 X_{61} -160	10 20 X_{62} -760	25 18 X_{63} -490	40 11 X_{64} 80	40 12 X_{65} -40	80 0 X_{66} 1 370	1
零售点数	1	1	1	1	1	1	6

图 3　调配图(元素判别值及总检验数)

零售点	A	B	C	D	E	V	零售点数
A	81 0 2 030	16 10 -190	15 15 5 -460	5 19 × -790	26 13 -190	20 15 -400	1 √5
B	15 10 -250	80 0 2 210	10 14 -580	15 15 -370	20 14 6 -310	10 20 × -700	1 √6
C	15 17 -520	10 15 -580	80 0 1 670	35 10 80	30 14 -220	25 17 4 -430	1 √4
D	5 19 3 -850	15 15 -370	35 10 80	80 0 1 730	15 19 × -730	40 13 -57	1 √3
E	25 14 -250	20 14 -310	30 15 -220	15 20 2 -730	80 0 1 490	40 11 20	1 √2
V	30 12 -160	10 20 1 -760	25 18 -490	40 11 80	40 12 -40	80 0 1 370	1 √1
零售点数	1 √3	1 √1	1 √5	1 √2	1 √6	1 √6	6

图 4　最小 H-圈的元素判别值调配图

X_{45} 标上‘×’，且将第 4 行和第 5 列标上‘√2’. (3) 余下未分配并具有调配权且元素判别值最大，以及总检验数最小的元素为 X_{41}，即 $dX_{41}=19$，$ZX_{41}=-850$. 故在 X_{41} 格子的左下角标上第 3 次

选择的记号'3'. 将对应的元素 X_{14} 标上'×', 且将第4行和第1列标上'√3'. (4) 余下未分配、具有调配权并且元素判别值最大, 以及总检验数最小的元素为 X_{36}, 即 $dX_{36}=17$, $ZX_{36}=-430$. 在 X_{36} 格子的左下角标上第4次选择的记号'4'. 将对应的元素 X_{63} 标上'×'(实际上第6行已经标上'√1', 故可以不再作标记)且将第3行和第6列标上'√4'. (5) 余下未分配并具有调配权且元素判别值最大, 以及总检验数最小的元素为 X_{13}, 即 $dX_{13}=15$, $ZX_{13}=-460$. 照样, 在 X_{13} 格子的左下角标上第5次选择的记号'5'. 将对应的元素 X_{31} 标上'×'(实际上第3行已经标上'√4', 故可以不再作标记)且将第1行和第3列标上'√5'. (6) 余下具有调配权并且元素判别值最大, 以及总检验数最小的元素为 X_{25}, 即 $dX_{25}=14$, $ZX_{25}=-310$. 同样, 在 X_{25} 格子的左下角标上第1选择的记号'6'. 将对应的元素 X_{52} 标上'×'(实际上第5行已经标上'√2', 故可以不再作标记), 且将第2行和第5列标上'√6'. 至此, 所有行列已全部标上记号, 故调配完成, 其结果如图4所示. 第4步. 给出行驶路线及计算耗费, 即计算分配结果通路的行驶时间. 得到调配或被选上的元素分别为 X_{62}, X_{54}, X_{41}, X_{36}, X_{13} 和 X_{25}. 连结成通路应为 $X_{62}\to X_{25}\to X_{54}\to X_{41}\to X_{13}\to X_{36}\to X_{62}$, 即从 $V\to B\to E\to D\to A\to C\to V$. 总行驶时间为 $10+15+5+25+15+20=90$ (min). 这个结果与书上的求解结果一样. 但书上从一个 H-圈出发, 要进行3次修改, 方可获得最优通路. 使用元素判别值, 只需一次调配, 便可获得最佳方案.

2.2 Hamilton 圈的计算机求解算法

元素判别值求解货郎担问题, 已经使用 VFP 编制成软件, 可在计算机586上运行. 一旦数据输入完成, 其调配和求解速度很快, 求解该题按以秒为单位, 求解时间为1 s. 现简述程序求解的一般算法设计. (1) 输入问题名称、编号、n 的数据及各个城市或地点的名称, 并存入相应数据文件 t-mn, t-gd. (2) 输入耗费数据 $C_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 并存入数据文件 t-ibt. (3) 计算 C_{ii} 赋值的数值: $C_{ij}=2\times\max(C_{ij})$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$. (4) 按元素判别值的数学模型(5)和总检验数的计算算式(7), 计算指定编号(由计算者输入的编号 BH0)或自动计算尚未计算的问题(其编号将自动赋给 BH0)的各个元素的 dX_{ij}, ZX_{ij}, 并以问题编号(字段为 BH)、下标 i(字段为 IV)、j(字段为 JV)值、元素判别值及总检验数等项, 存入数据文件 t-yspbj; 并以'元素判别值(字段名: PBJ)'降序、'总检验数(字段名: ZH)'升序、耗费值(HF)升序、下标升序的顺序进行排序(可使用语句: sort on pbj/b, zh/a, hf/a, iv/a, jv/a to t-pbj). (5) 对文件 t-pbj 进行过滤处理, 既 SET FILT TO BH=BH0, 并转向过滤后的首记录. (6) 调配前的变量初始化: $i=0$, $j=0$, BJ=1, HF=0. (7) 选取未作标记、元素判别值(PBJ)最大, 且总检验数(ZH)最小的元素(如总检验相等, 便选耗费较小的元素; 若耗费也相同, 则按下标的顺序选择). 将该元素所在的记录作标记 BZ=alltrim(STR(BJ, 3)); 并将 IV, JV 分别赋给 i, j. (8) 找 IV=j, JV=i 的记录, 将该元素所在行的标记置为'×'(即给 X_{ij} 的对称元素 X_{ji} 作标记). 将 IV=i(行号为 IV)的记录及 JV=j(列号为 JV)的记录, 作标记"√"+alltrim(str(bj, 3)). (9) 如还有未作标记的记录, 则执行(7); 否则转(10). (10) 计算耗费值, 并给出最优通路. 进行结束处理, 算法结束. 使用程序算法求解的结果, 如表1所示. 其结果与表上调配是一致的, 该表是上述调配算法的具体实现. 从表中可以看出, 实际求解的算法是极为简单的. (1) 初始化处理: $K=1$, $i=0$, $j=0$; $n0=n$(从 t-mn 读取 n); BH0=bh(自动读取或由使用者给定, 如由用户指定, 必须判断是否存在问题编号为 BH0 的问题需要求解. 这里从略). 定义数组: ZBZ(n, 2)并赋初值0; HF0=0. (2) 对排序文件进行问题编号为 BH0 的过滤, 并转向过滤后的首记录. (3) 如该记录的标志

表 1 最小 H-圈计算机程序求解算法示意表

问题编号	行坐标	列坐标	耗费时间/min	元素判别值	检验数总和	标志(BZ)	说 明
34	6	2	10	20	-760	1	第1个选上
34	5	4	15	20	-730	2	第2个选上
34	2	6	10	20	-700	×1	注销(6,2)对称点
34	4	1	5	19	-850	3	第3个选上
34	1	4	5	19	-790	√2	注销(5,4)对应列
34	4	5	15	19	-730	×2	注销(5,4)对称点
34	6	3	25	18	-490	√1	注销(6,2)对应行
34	3	1	15	17	-520	√3	注销(4,1)对应列
34	3	6	25	17	-430	4	第4个选上
34	3	2	10	15	-580	√1	注销(6,2)对应列
34	1	3	15	15	-460	5	第5个选上
34	1	6	20	15	-400	√4	注销(3,6)对应列
34	2	4	15	15	-370	√2	注销(5,4)对应列
34	4	2	15	15	-370	√1	注销(6,2)对应列
34	5	3	30	15	-220	√2	注销(5,4)对应行
34	2	3	10	14	-580	√5	注销(1,3)对应列
34	2	5	20	14	-310	6	第6个选上
34	5	2	20	14	-310	√1	注销(6,2)对应列
34	5	1	25	14	-250	√2	注销(5,4)对应行
34	3	5	30	14	-220	√4	注销(3,6)对应行
34	1	5	25	13	-190	√5	注销(1,3)对应行
34	6	1	30	12	-160	√1	注销(6,2)对应行
34	6	5	40	12	-40	√1	注销(6,2)对应行
34	5	6	40	11	20	√2	注销(5,4)对应行
34	6	4	40	11	80	√1	注销(6,2)对应行
34	2	1	15	10	-250	√3	注销(4,1)对应列
34	1	2	15	10	-190	√1	注销(6,2)对应列
34	3	4	35	10	80	√2	注销(5,4)对应列
34	4	3	35	10	80	√3	注销(4,1)对应行
34	6	6	80	0	1 370	√1	注销(6,2)对应行
34	4	6	40	0	1 490	√4	注销(3,6)对应列
34	5	5	80	0	1 490	√2	注销(5,4)对应行
34	3	3	80	0	1 670	√4	注销(3,6)对应行
34	4	4	80	0	1 730	√2	注销(5,4)对应列
34	1	1	80	0	2 030	√3	注销(4,1)对应行
34	2	2	80	0	2210	√1	注销(6,2)对应列

字段为空, 则执行(4); 否则转(5). (4) 将该记录的标志字段置为: alltrim(k, 3), i= IV, j = JV; ZBZ(k, 1) = IV, ZBZ(k, 2) = JV, HF0= HF0+ HF(计算耗费值), 查 IV = j, JV= i 的记录. 如标志字段为空, 则置为 '×'. 将 IV= i 及 JV= j 且标志字段为空的记录, 置为 '√'+ alltrim(k, 3). (5) 如果 $k< n0$, 则 $k= k+1$, 转(3); 否则执行(6). (6) 联接所分配元素的通路, 给出答案及耗费值. 只要将数组 ZBZ(n, 2) 中记录的下标, 从第 1 个开始, 以前一个的第 2 下标, 找下一

个的第1下标与之相等的数组元素即可. 并按联接好的顺序, 查找T -gd文件中相应记录的城市或地点名称, 最后连接成最佳的行驶路线. 这便是一条最小的H-圈通路, 其求解过程, 如表1所示.

3 结束语

使用元素判别值分配法, 求解Hamilton圈的最优通路既有效, 又极为简便. 具有明显的优越性. (1) 元素判别值的数学模型简单, 计算方便. (2) 分配原则简便. (3) 一次分配可获最优方案, 是现行方法所无法实现的. (4) 具有一定的通用性, 是当前所有可行的方法所不能达到的功能. 因而, 具有独特的创新性.

参 考 文 献

1 中国人民大学数学教研室编. 运筹学通论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990. 41～46

2 张银明. 元素判别值分配法的研究与实现[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(4): 447～453

3 张银明. 元素判别值分配法及其算法设计[J]. 计算机工程与应用, 1995, 12(6): 25～31

4 张银明. 调运、指派和货郎担问题的通用解法的研究——算法设计及其程序实现[J]. 计算机工程与应用, 1996, 2(1): 26～31

5 张银明. 元素判别值分配法在解TSP问题中的应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2002, 23(2): 191～197

A New Method for Solving Problem of Minimal Hamilton Circle

Zhang Yinming

(College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract Minimal Hamilton circle, which can be applied to solving problem of street vender´s load, wants for an effective method of solving so far. The author´s method of allocation of element discriminant value is just an effective method for solving this problem, which can be applied for solving algorithm design of minimal Hamilton circle.

Keywords Hamilton circle, allocation of element discriminant value, algorithm design